



Mechanický kalkulátor Nisa, jeho historie, konstrukce a užití

Bakalářská práce

Studijní program:

B1101 Matematika

Studijní obory:

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Informatika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce:

Kateřina Čiháčková

Vedoucí práce:

doc. Ing. Martin Plešinger, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky





Zadání bakalářské práce

Mechanický kalkulátor Nisa, jeho historie, konstrukce a užití

Jméno a příjmení: Kateřina Čiháčková
Osobní číslo: P16000166
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obory: Matematika se zaměřením na vzdělávání
Informatika se zaměřením na vzdělávání
Zadávající katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Akademický rok: 2017/2018

Zásady pro vypracování:

Potřeba provádět velké množství matematických výpočtů, resp. elementárních operací podobného typu vzniká ruku v ruce s rozvojem matematiky a matematizace okolního světa. Přelom konec devatenáctého a začátek dvacátého století přinesl, ještě před nástupem elektronických počítačů, několik efektivních postupů, přesněji řečeno konstrukcí, jak takové výpočty zvládat čistě mechanickou cestou, později doplněnou elektrickým pohonem.

Do historie libereckého regionu se v tomto ohledu nejvýrazněji zapsal podnik Nisa vyrábějící převážně v druhé polovině 20. století stejnojmenné mechanické a elektromechanické kalkulátory. Cílem této bakalářské práce je zmapovat historii výroby jako takové, evoluci jednotlivých variant a typů kalkulátoru (mj. právě i z pohledu konstrukce funkčních prvků) a nakonec také možnosti jejich využití z pohledu ryze matematického. Mechanické kalkulátory zvládají čtyři základní aritmetické operace: sčítání, odečítání, násobení a přibližné dělení (resp. dělení se zbytkem), práce zde čtenáře seznámí zejména s tím, jak na takovém stroji provést výpočet druhé odmocniny.

Požadavky: Tato bakalářská práce zasahuje do oblastí elementární výpočetní matematiky, algoritmizace a informatiky, ale také regionální historie a okrajově též konstrukce mechanismů. Student by se měl orientovat právě v základech matematiky a informatiky, zájem o historii je výhodou. Práce by měla být psaná v LaTeXu, bude-li to v možnostech studenta.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce:
Jazyk práce:

tištěná/elektronická
Čeština



Seznam odborné literatury:

- V. Elznic: Počítacie stroje v praxi, Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, SVTL, Bratislava, 1958.
N. J. Higham: Accuracy and stability of numerical algorithms. Second edition, SIAM, Philadelphia, 2002.
J. Klír: Matematické stroje, edice Technický výběr do kapsy, svazek 31, Práce, Praha, 1961.
K. Lenz: Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen, edice Aus Natur und Geisteswelt, Bändchen 490, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1915.
K. Lenz: Die Rechenmaschinen und das Maschinenrechnen, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 1924.
<http://www.springer.com/gp/book/9783663155041>
<https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-663-16076-2>
E. Martin: The Calculating Machines (Die Rechenmaschinen), Their History and Development (transl. P. A. Kidwell, M. R. Williams), Volume 16 in the Charles Babbage Institute Reprint Series for the History of Computing, The MIT Press, Cambridge MA and London, and Tomash Publishers, Los Angeles and San Francisco, 1992.
V. Mrázek: Matematické stroje, edice Příruční učební texty – kurs technických znalostí, svazek 92, Státní nakladatelství technické literatury, SNTL, Praha, 1964.
W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: Numerical recipes in C++. The art of scientific computing. Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
V. Ryšavý: O počítacích strojích, Jednota československých matematiků a fyziků v Praze, Praha 1928.
Rechenmaschinen Illustrated <http://www.rechenmaschinen-illustrated.com/>
Rechnerlexikon <http://www.rechnerlexikon.de/artikel/Hauptseite>
John Wolff's Web Museum, Calculating Machines <http://www.johnwolff.id.au/calculators/index.htm>
Mechanická matematika <http://user.mendelu.cz/marik/mechmat/>
Mechanical Caluclators <http://w-hasselo.nl/mechn/>

Vedoucí práce: doc. Ing. Martin Plešinger, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce: 5. května 2018
Předpokládaný termín odevzdání: 18. dubna 2019

L.S.

prof. RNDr. Jan Pícek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

11. července 2020

Kateřina Čiháčková

Anotace

Tato práce se věnuje (elektro)mechanickým kalkulátorům značky Nisa, které se ve 20. století vyráběly na Liberecku. Práce obsahuje dvě části. V první se podrobněji věnujeme numerickým výpočtům, které lze na kalkulátorech realizovat. Kromě klasického sčítání, odečítání, násobení a dělení se zbytkem, které jsou triviální, se věnujeme hlavně numerickému výpočtu odmocniny z přirozeného, resp. kladného racionálního čísla. Podrobně vyložíme, jak jednotlivé numerické metody fungují, jak spolu souvisejí a vybereme metodu, která je pro výpočet na jednoduchém kalkulátoru nejvhodnější.

Ve druhé části práce se stručně věnujeme historii výroby. Popíšeme tři odlišné varianty konstrukcí výpočetního mechanismu, které se nám podařilo dohledat. Dále se pak v rámci jednotlivých konstrukčních variant soustředíme na jednotlivé modely, modelové řady, barevné varianty atd., které se zde v průběhu let vyráběly.

Klíčová slova:

numerický výpočet; druhá odmocnina; babylonská metoda; Newtonova metoda; Taylorův polynom; (elektro)mechanický kalkulátor; kalkulátor Nisa; výroba na Liberecku

Abstract

This work is focused to (electro)mechanical calculators Nisa that were produced throughout the 20th century in Liberec region. The work consists of two parts. The first part focused in detail to numerical calculator, that are applicable on such calculators. With the exception of trivial calculations, such as addition, subtraction, multiplication and division with remainders, we focus mainly on the numerical methods for the calculators the square-root of a natural, or positive rational number. We explain in detail how these methods work, how they relate to each other, and finally we propose the one, which fits the best for such simple calculator.

In the other part, we briefly go through the history of the production. We describe three construction variants of the computational mechanism, that we were able to identify. Further, we show which models, model lines, color variants, etc. were produced within the individual construction variant throughout the years.

Key words:

numerical computation; square-root; Babylonian method; Newton's method; Taylor's polynomial; (electro)mechanical calculator; calculator Nisa; industry in Liberec region

Poděkování

Chtěla bych poděkovat doc. Ing. Martinu Plešingerovi Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, trpělivost a ochotu, cenné rady a odborný dohled.

Obsah

Anotace	5
Abstract	6
Seznam obrázků	10
Seznam tabulek	11
Použité značení a zkratky	12
Úvod	13
1 Elementární výpočty na mechanických kalkulátorech	15
1.1 Sčítání a odečítání	15
1.2 Násobení a dělení se zbytkem	16
2 Metody výpočtu druhé odmocniny přirozeného čísla	18
2.1 Iterační metody výpočtu	18
2.2 Babylonská metoda	19
2.2.1 Horní odhad	20
2.2.2 Monotonie posloupnosti $\{a_n\}$	21
2.2.3 Limita posloupnosti $\{a_n\}$	23
2.2.4 Algoritmus	23
2.3 Newtonova metoda tečen	24
2.3.1 Konstrukce tečny a přibližného řešení	25
2.3.2 Iterační schéma	25
2.3.3 Nalezení odmocniny pomocí Newtonovy metody	26
2.4 Taylorova metoda	26
2.4.1 Taylorova metoda prvního stupně pro výpočet odmocniny . . .	28
2.4.2 Newtonova metoda a metoda využívající Taylorova polynomu prvního stupně pro obecnou funkci $f(x)$	29
2.4.3 Taylorova metoda druhého stupně pro výpočet odmocniny . .	30
2.4.4 Taylorova metoda k -tého stupně pro výpočet odmocniny . . .	32
2.5 Bakhshaliho metoda	33
2.6 Metoda řetězových zlomků	35
2.6.1 Reálná čísla a řetězové zlomky	36

2.6.2	Sblížené zlomky	37
2.6.3	Konstrukce řetězového zlomku pro $\sqrt{s}$	38
2.7	Algoritmus postupného výpočtu druhé odmocniny	40
2.7.1	Základní princip	42
2.7.2	Praktický výpočet	42
3	Kalkulátory Nisa a jejich výroba v Proseči nad Nisou – historické poznámky	46
3.1	Historie výroby předcházející kalkulátorům	46
3.2	Stručná historie výroby kalkulátorů Nisa	47
4	Katalog dohledaných (elektro)mechanických kalkulátorů Nisa	48
4.1	Kalkulátory Odhnerova typu – Nisa typ P	49
4.2	Kalkulátory s vahadly – Nisa typ C	50
4.3	Kalkulátory s klávesnicí a Leibnitzova kola – Nisa typ M a typové řady K a PK	51
4.3.1	Nisa typ M	52
4.3.2	Nisa typ K	53
4.3.3	Nisa typ K1 a PK1 (pravděpodobně starší varianta)	54
4.3.4	Nisa typ K1 a PK1 (pravděpodobně novější varianta)	55
4.3.5	Nisa typ K2	56
4.3.6	Nisa typ K5 a PK5	57
	Závěr	58
	Reference	59

Seznam obrázků

1.1	Schéma jednoho z typů mechanických kalkulátorů	16
3.1	Historický vývoj loga kalkulátorů Nisa	47
4.1	Srovnání tří různých technologií používaných při výrobě kalkulátorů Nisa	48
4.2	Mechanický kalkulátor Nisa typ P	49
4.3	Mechanický kalkulátor Nisa typ C	50
4.4	Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typů M, K, a PK	51
4.5	Srovnání tří exemplářů kalkulátorů typu M	52
4.6	Mechanický kalkulátor Nisa typ M	52
4.7	Mechanický kalkulátor Nisa typ K	53
4.8	Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K1 a PK1 (starší varianta)	54
4.9	Mechanický kalkulátor Nisa typ K1 a PK1 (starší varianta)	54
4.10	Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K1 a PK1 (novější varianta)	55
4.11	Mechanický kalkulátor Nisa typ K1 a PK1 (novější varianta)	55
4.12	Srovnání tří exemplářů kalkulátorů modelu K2	56
4.13	Mechanický kalkulátor Nisa typ K2	56
4.14	Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K5 a PK5	57
4.15	Mechanický kalkulátor Nisa typ K5 a PK5	57

Seznam tabulek

2.1	Taylorův polynom prvního stupně vs. Newtonova metoda	29
2.2	Sblížené zlomky čísla $\sqrt{28977}$	41
2.3	Algoritmus postupného výpočtu druhé odmocniny	45

Použité značení a zkratky

V textu používáme zejména následující značení:

Značení	Význam
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel (ať už s nebo bez nuly)
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$	množina přirozených čísel bez nuly
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^+$	množina racionálních, resp. kladných racionálních čísel
$\mathbb{K}$	množina kvadratických iracionalit, tj. čísel $\frac{p+\sqrt{n}}{q}$
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$	množina reálných, resp. kladných reálných čísel
$n!$	faktoriál přirozeného čísla $n! = n \cdot (n-1)!$, $0! = 1$
$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$	posloupnost čísel $a_0, a_1, a_2, \dots$
$f^{(n)} = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}$	n -tá derivace funkce $f(x)$, $f^{(0)}(x) = f(x)$ speciálně je pak obvykle
$f'(x) = f^{(1)}$	první derivace funkce $f(x)$
$f''(x) = f^{(2)}$	druhá derivace funkce $f(x)$
$f'''(x) = f^{(3)}$	třetí derivace funkce $f(x)$
$f^{-1}(x)$	inverzní funkce k funkci $f(x)$; $f(f^{-1}(x)) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$
$[x_0; x_1, x_2, \dots, x_n]$	konečný řetězový zlomek
$[x_0; x_1, x_2, x_3, \dots]$	nekonečný řetězový zlomek
$[x_0; x_1, \dots, \overline{x_k, \dots, x_{k+d}}, \dots]$	nekonečný periodický řetězový zlomek

Úvod

Tato práce je rozdělena do dvou částí. V první části se zabýváme zejména výpočtem druhé odmocniny čísla 2. Budeme chtít nalézt druhou odmocninu, nejčastěji označovanou $\sqrt{s}$, $\sqrt[2]{s}$, nebo $s^{1/2}$, z přirozeného čísla $s \in \mathbb{N}^+$, tedy nezáporného racionálního čísla $s = p/q \in \mathbb{Q}^+$, kde $p, q \in \mathbb{N}_0$, $q \neq 0$. Odmocnina z přirozeného čísla je však buď opět číslo přirozené, nebo číslo iracionální. Nás budou zajímat především iracionální případy. Nalézt odmocninu přestě tak nebude možné. Budeme tak nuceni hledat nějakou její přibližnou hodnotu – *aproximaci*. K ní se budeme chtít dostat tzv. *numerickými výpočetními metodami*. Mohli bychom použít i dnes již často pozapomenuté - metody geometrické. Geometricky můžeme úlohu nejsnáze přeformulovat jako nalezení (strany) čtverce s předepsanou plochou s . Pro geometrický výpočet je však nejlepší použít tzv. *Euklidovu větu o výšce*. Nejběžnější numerické výpočetní metody pro nalezení odmocniny jsou iterační. Některé metody, se kterými se zde seznámíme, budou matematicky elegantní, jako např. Newtonova metoda, a budou mít spoustu dalších souvislostí, jak se pokusíme ukázat. Jiné, ne tak elegantní, jsou vhodnější např. pro výpočet z hlavy, resp. proveditelný jednoduše tužkou na papíře. Jeden takový algoritmus pro výpočet odmocniny bude vhodný i pro výpočet na našich kalkulátorech.

Nejprve představíme babylonskou metodu, zřejmě první algoritmus použitý pro aproximaci $\sqrt{s}$. Babylonský algoritmus výpočtu odmocniny je proces, při kterém se generuje posloupnost čísel a_n , která se opakuje, dokud není dosaženo požadované přesnosti. Jedná se o algoritmus, kdy se počet číslic pomocí aproximace s každou iterací zhruba zdvojnásobí viz 2.7.

V další kapitole představíme Newtonovu–Raphsonovu metodu neboli metodu tečen, viz [2]. Princip této metody spočívá v hledání přibližné polohy průsečíku grafu funkce $y = g(x)$ s vodorovnou osou ($y = 0$) tak, že funkci v nějakém bodě $\tilde{x}$ nahradíme tečnou této funkce v tomto bodě. Místo hledání průsečíku nelineární funkce hledáme průsečík tečny popsany lineární funkcí. Dojdeme k závěru, že babylonská metoda výpočtu odmocniny & Newtonova metoda použitá na funkci $g(x) = x^2 + s$ jsou totéž.

Dále navážeme na Taylorovu metodu, která je založena na aproximaci odmocniny pomocí Taylorova rozvoje. Ukážeme, že v tomto případě je Taylorova metoda identická s babylonskou metodou.

Další metoda nalezení aproximace druhé odmocniny byla popsána ve starověkém rukopisu zvaném *Bakhshaliho rukopis*, viz [3]. Odpovídá dvěma po sobě jdoucím iteracím babylonské metody začínající s počátečním odhadem a_0 . Tj. jeden krok Bakhshaliho metody přesně opovídá dvěma po sobě jdoucím krokům babylonské metody.

Jednou z dalších možností jak vyjádřit odmocniny je metoda řetězových zlomků $x = [x_0; x_1, x_2, \dots, x_n]$. Rekurentní vztahy v této kapitole použijeme pro výpočet sblížených zlomků – aproximací hledané odmocniny. Konkrétní výpočet si ukážeme opět na našem příkladu $\sqrt{s}$. Nalezli jsme řetězový zlomek námi hledané odmocniny $\sqrt{28977}$, ale ovšem s racionálními.

V druhé části této kapitoly představíme mechanické kalkulační stroje Nisa. Tyto kalkulátory se vyráběly v závodě Nisa Proseč nad Nisou a dodávaly se do 35 zemí. Modely jsou rozděleny do tří skupin dle používaných technologií, tzv. Leibnitzova ozubená kola (Leibnitz wheel, stepped drum, dále Odhnerova ozubená kola (pinwheel, varianta Leibnitzova kola) a tzv. vahadlový mechanismus. Některé stroje byly plně mechanické, na kliku a s postupnými drobnými či většími inovacemi zůstaly v používání až do 70. let dvacátého století. Novější modely byly již elektromechanické. V sedmdesátých letech byly mechanické stroje vytlačeny levnými elektronickými kalkulačkami.

1 Elementární výpočty na mechanických kalkulátorech

Nejprve se velmi stručně okomentujeme elementární operace, které lze provádět na mechanických kalkulátorech provádět.

1.1 Sčítání a odečítání

Z pohledu moderních výpočetních prostředků mechanické kalkulátory zpravidla používají několik *displejů* sloužících zároveň jako *paměti* nebo *registry*:

- jeden pro zobrazování aktuálního operandu – často nepřítomný jako displej, zápis, uložení i čtení hodnoty operandu člověkem lze totiž často provést přímo prostřednictvím klávesnice (vstupu) kalkulátoru,
- druhý pro zobrazování aktuálního stavu mezivýpočtu – sloužící zároveň jako *akumulátor* klasického procesoru
- třetí sloužící pro evidenci počtu provedených operací.

Viz také obrázek ?? . Tyto registry jsou schopny uchovat několik desítkových cifer. Paměť tedy nepracuje jako u klasického počítače v binární, ale přímo v dekadické číselné soustavě.

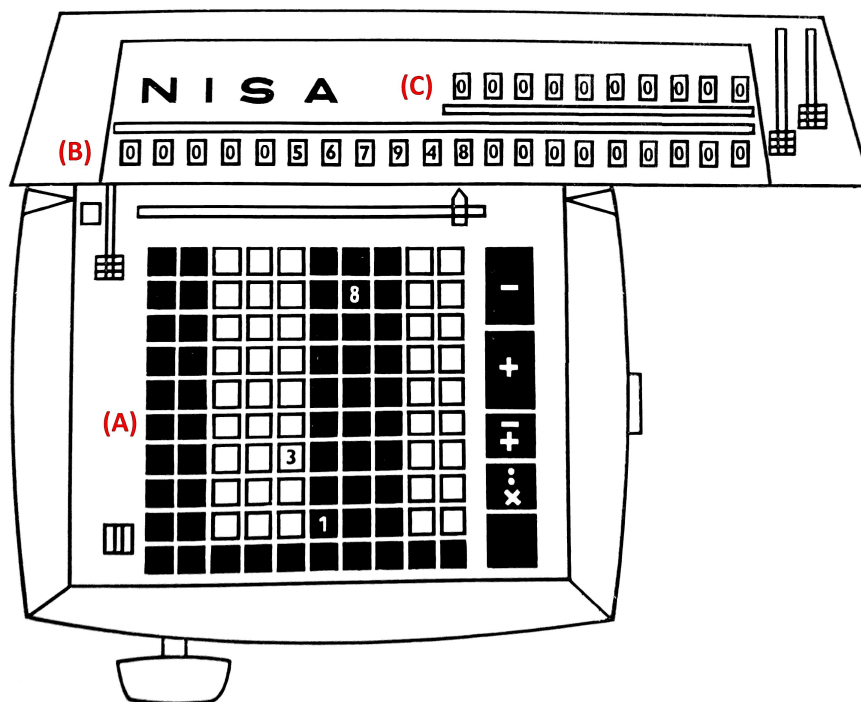
Sčítání a odečítání je však prováděno zcela analogicky jako např. sčítání a odečítání jednoduchých číselných typů (*integer*) v počítači. Zejména tedy, když dojde k *přetečení*, tedy přičtení takového čísla do akumulátoru, že součet je větší než zobrazitelný rozsah, dojde k vynulování celé paměti a přičtení jen toho „co je navíc“. Schematicky, na pěticiferném displeji

$$[12345] + [98765] \rightarrow [11110].$$

Obdobně při odečítání může dojít k *podtečení*, když menšitel je větší než aktuální stav akumulátoru. Opět schematicky na stejném displeji

$$[00000] - [00001] \rightarrow [99999].$$

Matematicky jde o sčítání, resp. odečítání modulo 10^5 , resp. 10^d , kde d je počet cifer displeje.



Obrázek 1.1: Schéma jednoho z typů mechanických kalkulačků. Označeny jsou výše zmiňované paměti, resp. registry, resp. displeje, resp. ovládací prvky: (A) paměť aktuálního operandu a zároveň vstup, (B) akumulátor, hlavní registr výsledku, (C) počítadlo operací. Náčrt převzat z manuálu kalkulačků Nisa PK5, [14].

1.2 Násobení a dělení se zbytkem

Operace násobení, resp. dělení se zbytkem, tj. dělení celého čísla a celým číslem b , $a \geq b$, tak, že

$$a = b \cdot q + r, \quad q, r \in \mathbb{N}_0, \quad r < b,$$

je realizováno jednoduše postupným sčítáním, resp. postupným odečítáním.

V případě násobení je tedy typicky na začátku prázdný akumulátor. Na vstupu nastavíme jeden z operandů, řekněme a , a postupně ho přičítáme do akumulátoru. Třetí displej zobrazující počet operací nám přitom říká, kolikrát jsme přičtení provedli. Je-li druhý součinitel např. b , součin se v akumulátoru objeví v ten okamžik, když se v registru počtu operací objeví b .

Obdobně u dělení se zbytkem. Zde je typicky na začátku v akumulátoru dělenec a , tedy první z operandů. Na vstupu nastavíme druhý z operandů, tedy dělitel b . Odečítání provádíme tak dlouho, než dojde k podtečení (přesněji řečeno, pokud k němu dojde, musíme jedno odečítání vrátit). Na konci procesu tak v akumulátoru zbyde *reziduum* tedy *zbytek po dělení* r a registr počtu operací obsahuje *celočíslný podíl* q .

Všechny tyto výpočty lze samozřejmě analogicky provádět i na vybraných racionálních číslech (takových, která mají v desítkové soustavě ukončený desetinný

rozvoj a která obsahují jen několik nenulových cifer dostatečně blízko u sebe). Stačí jen vhodně posunout desetinnou čárku a čísla interpretovat jako celá.

V praxi pak můžeme využívat řady různých technických „vychytávek“, které kalkulátory mají. Budeme-li např. násobit čísla 64 a 122, stačí fakticky provést přičtení jen několik. Kalkulátor totiž umožňuje velmi efektivně násobit a dělit deseti, prostým posunutím vstupu oproti akumulátoru. Tedy výpočet $64 \cdot 122$ bychom technicky provedli na pět sčítání a dvě posunutí

$$\begin{aligned} [00000]_{ac} + [00064]_{in} + [00064]_{in} &\rightarrow [00128]_{ac}, \\ [00064]_{in} \cdot 10 &\rightarrow [00640], \\ [00128]_{ac} + [00640]_{in} + [00640]_{in} &\rightarrow [01408]_{ac}, \\ [00640]_{in} \cdot 10 &\rightarrow [06400], \\ [01408]_{ac} + [06400]_{in} &= [07808]_{ac}. \end{aligned}$$

Dolní indexy zde upřesňují, co je obsahem akumulátoru ($[xxxx]_{ac}$) a co je na vstupu ($[xxxx]_{in}$).

Dále již nebudeme takto detailní popis potřebovat. Je jasné, že když budeme chtít nějaký složitější výpočet provést, budeme ho muset „rozbít“ na operace zde prezentované. Tedy na sčítání, odečítání, násobení a dělení se zbytkem. V následující kapitole se detailněji podíváme na výpočet odmocniny.

2 Metody výpočtu druhé odmocniny přirozeného čísla

V této kapitole se budeme zabývat tím, jak počítat druhou odmocninu. Postupy pro nalezení druhých kořenů (zejména druhé odmocniny 2) jsou známy alespoň od období starověkého Babylonu v 17. století před Kristem (tzv. babylonská metoda). Moderní analytické metody se začaly rozvíjet po zavedení arabského číselného systému do západní Evropy na počátku renesance, viz např. [1].

2.1 Iterační metody výpočtu

My budeme chtít nalézt druhou odmocninu, označovanou zpravidla $\sqrt{s}$, $\sqrt[2]{s}$, nebo $s^{1/2}$, z přirozeného čísla $s \in \mathbb{N}^+$, resp. nezáporného racionálního čísla $s = p/q \in \mathbb{Q}^+$, kde $p, q \in \mathbb{N}_0$, $q \neq 0$. Obě úlohy jsou v podstatě identické proto, že

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}.$$

Odmocnina z přirozeného čísla je však buď opět číslo přirozené, nebo číslo iracionální. Nás budou zajímat především ty druhé případy. Nalézt odmocninu přestě tak nebude možné. Budeme tak nuceni hledat nějakou její přibližnou hodnotu – *aproximaci*. K ní se budeme chtít dostat tzv. *numerickými výpočetními metodami*. Poznamenejme, že numericky můžeme hledat přímo odmocninu samotnou, nebo úlohu přeformulovat a hledat nezáporný kořen rovnice $x^2 - s = 0$. Mohli bychom použít i dnes již často pozapomenuté - metody geometrické. Geometricky můžeme úlohu nejsnáze přeformulovat jako nalezení (strany) čtverce s předepsanou plochou s . Pro geometrický výpočet je však nejlepší použít tzv. *Euklidovu větu o výšce*.

Nejběžnější numerické výpočetní metody pro nalezení odmocniny jsou iterační. Spočívají v nalezení vhodného počátečního odhadu hodnoty odmocniny, řekněme x_0 , následovaném iteračním zpřesněním $x_1 = f(s, x_0)$. Zpřesnění provádíme opakovaně, tj.

$$x_{n+1} = f(s, x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

dokud nejsou splněna některá kritéria ukončení celého procesu. Např. nalezneme-li číslo x_N takové, že

$$|x_N^2 - s| < \varepsilon$$

je dostatečně malé, menší než nějaké předepsané kladné $\varepsilon > 0$.

Často může být počáteční odhad x_0 relativně libovolné číslo, ideální by ale bylo, odhadnout jej tak, aby nám pak stačilo co nejméně iterací. Pokud iterační zpřesnění funguje správně, resp. je tzv. *konzistentní*, tedy platí $\sqrt{s} = f(s, \sqrt{s})$, tedy odmocnina z hledaného čísla je jeho stacionárním bodem, snadno nahlédneme, že počet iterací bude minimální, právě když $x_0 = \sqrt{s}$, kdybychom však uměli odmocninu z s odhadnout rovnou, nemusíme ji počítat. Nejznámější iterační metoda je asi Newtonova metoda tečen, kterou mj. v této práci představíme. Navíc uvidíme, že tato moderní metoda je zároveň již dávno známou metodou babylonskou.

Některé metody, se kterými se zde seznámíme, budou, řekněme, matematicky elegantní, jako např. ona Newtonova metoda, a budou mít spoustu dalších souvislostí, jak se pokusíme ukázat. Jiné, ne tak elegantní, jsou vhodnější např. pro výpočet z hlavy, resp. proveditelný jednoduše tužkou na papíře. Jeden takový algoritmus pro výpočet odmocniny bude vhodný i pro výpočet na našich kalkulátorech.

Poznamenejme, že také moderní počítače (resp. procesory) provádějí výpočet odmocniny pomocí podobných numerických algoritmů, jen velmi dobře optimalizovaných, ideálně rychle konvergujících k velmi přesným aproximacím. A přestože jsou moderní počítače mnohem dál než stařícké kalkulátory, ani na moderních strojích neumíme (v klasické aritmetice) pracovat s iracionálními čísly. I zde pracujeme jen s jistou, velmi omezenou a velmi zředěnou podmnožinou množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

2.2 Babylonská metoda

Možná první algoritmus použitý pro aproximaci $\sqrt{s}$ je známá jako babylonská metoda. Babylonská metoda je postavená na následujícím rekurentním vztahu

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right), \quad (2.1)$$

který generuje posloupnost

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty},$$

jejíž limita je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{s}.$$

Podrobněji se na motivaci rekurentního vztahu (2.1) a zdůvodnění jeho funkčnosti podíváme níže.

Stejně jako my, tak i Babyloňané si pro ulehčení výpočtů vytvářeli matematické tabulky – například násobilku, tabulku převrácených hodnot čísel nebo jejich aproximací a dokonce tabulky mocnin (používané při výpočtech, které bychom my dnes prováděli pomocí kvadratických rovnic) a některých odmocnin. Dále se do dnešní doby dochovaly i tabulky obsahující vztahy v trojúhelnících a v pravidelných n -úhlečích. Víme, že Babyloňané uměli přibližnou hodnotu odmocniny vypočítat, nevíme však jak. Žádné zápisy o postupech se nám z této doby nezachovaly.

Z dochovaných hliněných tabulek je však jasné, že Babyloňané znali analogie (slovní popisy) dnešních známých matematických pravidel

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{a} \quad a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b).$$

Vycházely z nich jejich výpočty odmocnin. Chceme vypočítat přibližnou hodnotu odmocniny z přirozeného čísla s .

2.2.1 Horní odhad

Budeme předpokládat, že s není druhou mocninou přirozeného čísla, jinak bychom už byli hotovi. Najdeme nejmenší čtverec, menší než je s a vyjádříme s ve tvaru

$$s = a^2 + b, \tag{2.2}$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$. Pokud s není čtvercem, platí $a^2 < s < (a+1)^2$. Číslo a je v jistém smyslu přirozená nejjednodušší aproximace hledané odmocniny a platí

$$a < \sqrt{s}.$$

Aproximaci odmocniny s lze odhadnout shora následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \sqrt{s} = \sqrt{a^2 + b} &< \sqrt{a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2 + b}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b}{a} + a \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ukázali jsme tedy, že odmocnina z s je ostře menší než aritmetický průměr čísel s/a a a . Všimněme si, že v předchozím odvození horního odhadu nikde nepoužíváme vlastnost, že a^2 je nejmenší čtverec ostře menší než s (přičemž s není čtverec). To motivuje následující lemma.

Lemma 1. *Nechť $s \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$, pak platí*

$$\sqrt{s} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right).$$

Důkaz. Důkaz lemmatu provedeme obdobně jako v (2.3), jen musíme rozlišit dva případy. Zřejmě

$$s = a^2 + b$$

přičemž b může být

- kladné (pokud $s < a^2$),
- nulové (pokud $s = a^2$), nebo
- záporné (pokud $s > a^2$).

Je-li $b \neq 0$, pak

$$\frac{b^2}{4a^2} > 0$$

neboť a je vždy nenulové. Pak postupujeme zcela identicky jako v (2.3),

$$\begin{aligned} \sqrt{s} = \sqrt{a^2 + b} &< \sqrt{a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a} = \frac{2a^2 + b}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 + b}{a} + a \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

V opačném případě, tj. je-li $b = 0$, pak

$$\sqrt{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right),$$

čímž jsme lemma dokázali. □

2.2.2 Monotonie posloupnosti $\{a_n\}$

Nechť $a_1 > \sqrt{s}$ je (první) odhad počítané odmocniny, který jsme získali předchozím vztahem

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right),$$

triviální případ $a_1 = \sqrt{s}$ nebudeme uvažovat. Pokusíme se nalézt přesnější odhad a_2 , tedy číslo, pro které platí

$$a_1 > a_2 \geq \sqrt{s}.$$

Kdybychom chtěli náš odhad a_1 opravit zcela přesně, budeme muset nalézt nějaké $x > 0$ takové, aby platilo

$$s = (a_1 - x)^2 = a_1^2 - 2a_1x + x^2. \quad (2.5)$$

Najít takové x je teoreticky jednoduché, neboť to v praxi znamená nalézt řešení kvadratické rovnice

$$x^2 - (2a_1)x + (a_1^2 - s) = 0. \quad (2.6)$$

To ale znamená, mj. spočítat odmocninu z diskriminantu tohoto trojčlenu, tedy odmocninu z $(2a_1)^2 - 4(a_1^2 - s) = s$. Pro přesnou opravu odhadu bychom tedy museli spočítat odmocninu z s , kterou však hledáme. Přesnou opravu tedy není možné provést.

Abychom se vyhnuli počítání odmocnin, můžeme rovnici (2.6) naivně zjednodušit tak, že zanedbáme kvadratický člen. Pokusíme se tedy najít $\tilde{x}$ tak, aby bylo splněno alespoň

$$(2a_1)\tilde{x} - (a_1^2 - s) = 0.$$

Dostaneme tak lineární rovnici, jejíž řešení je

$$\tilde{x} = \frac{a_1^2 - s}{2a_1}.$$

Dosadíme-li naše $\tilde{x}$ za x do vztahu (2.5), resp. do vztahu

$$\sqrt{s} = a_1 - x,$$

nedostaneme na levé straně hledané $\sqrt{s}$, ale nějaké, řekněme, a_2 . Tedy

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1^2 - s}{2a_1} = \frac{a_1^2 + s}{2a_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_1} + a_1 \right).$$

Protože a_2 jsme získali jako rozdíl dvou kladných čísel, konkrétně a_1 zmenšené o kladné $\frac{a_1^2 - s}{2a_1}$ (čitatel $a_1^2 - s$ nemůže být nulový), zřejmě platí $a_1 > a_2$. Podle tvrzení Lemmatu 1 navíc platí $a_2 \geq \sqrt{s}$, protože jsme navíc vynechali triviální případ $a_1 = \sqrt{s}$, nemůže nastat rovnost a platí $a_2 > \sqrt{s}$. Celkově tedy dostáváme

$$a_1 > a_2 > \sqrt{s}.$$

Obdobným způsobem bychom nyní mohli všechny úvahy zopakovat s tím, že začneme s horním odhadem a_2 (resp. a_{n-1}) a pokusíme se ho zpřesnit, což vyústí v nějaký přesnější odhad a_3 (res. a_n). [4] To motivuje následující lemma.

Lemma 2. *Nechť $a_0 \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathbb{R}^+$, a nechť*

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a_{n-1}} + a_{n-1} \right).$$

Pak posloupnost

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

je

- *pro $a_0 > \sqrt{s}$ monotónně klesající a zdola omezená číslem $\sqrt{s}$, tj.*

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > \sqrt{s},$$

- *pro $a_0 = \sqrt{s}$ je konstantní, tj.*

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n = \sqrt{s},$$

- *pro $a_0 < \sqrt{s}$ je s výjimkou prvního členu a_0 opět monotónně klesající a zdola omezená číslem $\sqrt{s}$, tj.*

$$a_1 > a_2 > \dots > a_{n-1} > a_n > \sqrt{s} > a_0.$$

Důkaz. Pro $a_0 \neq \sqrt{s}$ dostáváme $a_1 > \sqrt{s}$ dle Lemmatu 1. Nerovnosti

$$a_{n-1} > a_n > \sqrt{s}, \quad \text{pro } n = 2, 3, 4, \dots$$

plynou z přechodích úvah v této sekci.

Pro $a_0 = \sqrt{s}$ je tvrzení zřejmé, ověříme ho znadno dosazením do vztahu pro a_n ,

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} \right) = \sqrt{s}, \quad (2.7)$$

což jsme chtěli dokázat. □

2.2.3 Limita posloupnosti $\{a_n\}$

Ze vztahu (2.7) již víme, že pro číslo $\sqrt{s}$ platí $\sqrt{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} \right)$, tedy $\sqrt{s}$ je jediným stacionárním bodem zobrazení

$$\mathcal{Z} : a \mapsto \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} + a \right),$$

na $\mathbb{R}^+$. Poznamenejme, že na celé reálné ose $\mathbb{R}$ existuje ještě druhý stacionární bod $(-\sqrt{s})$ a na rozšířené reálné ose $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ještě formálně existují další dva stacionární body $\pm\infty$. My se nicméně pohybujeme na $\mathbb{R}^+$ kde zobrazení funguje následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left((0, \sqrt{s})\right) &= (\sqrt{s}, +\infty), \\ \mathcal{Z}(\sqrt{s}) &= \sqrt{s}, \\ \mathcal{Z}\left((\sqrt{s}, A)\right) &\not\subseteq (\sqrt{s}, A),\end{aligned}\tag{2.8}$$

kde pro libovolná $A \in \mathbb{R}^+$, $A > \sqrt{s}$. Zobrazení je tedy v jistém smyslu kontrahující a lze pak ukázat, že limita libovolné posloupnosti $\{a_n\}$ je rovna hledané odmocnině z s , což my nebudeme dokazovat.

2.2.4 Algoritmus

Algoritmus (babylonský) výpočtu odmocniny je tedy zřejmý. Celý výše naznačený proces generování posloupnosti čísel a_n se opakuje, dokud není dosaženo požadované přesnosti. Jedná se o algoritmus, kdy se počet číslic pomocí aproximace s každou iterací zhruba zdvojnásobí viz 2.7. Postupuje se tedy takto:

- (i) Začneme libovolnou kladnou počáteční hodnotou a_0 (čím blíže ke skutečné druhé odmocnině z s , tím lépe).
- (ii) Pro $n = 1, 2, 3, \dots$ spočítáme a_n jako aritmetický průměr a_{n-1} a s/a_{n-1} .
- (iii) Výpočet v kroku 2 zastavíme jakmile je dosaženo požadované přesnosti.

Schematicky

$$\begin{aligned}a_0 &\approx \sqrt[2]{s}, \\ a_n &= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{s}{a_{n-1}} \right), \\ \sqrt{s} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.\end{aligned}$$

Poznámka 1. Poznamenejme, že kdybychom aritmetický průměr v kroku 2

$$\frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{s}{a_{n-1}} \right) = a_n$$

nahradili průměrem geometrickým

$$\left(a_{n-1} \cdot \frac{s}{a_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{s}$$

dostaneme po prvním odhadu a_0 přesný výsledek v jediné iteraci.

Celý proces tedy můžeme také interpretovat tak, že pro naše účely ideální geometrický průměr zde aproximujeme průměrem aritmetickým.

Příklad 1. Příklad výpočtu $\sqrt{s}$, kde $s = 28977$, babylonskou metodou. Jako počáteční odhad vezmeme $a_0 = 200$. Během výpočtu provádíme zokrouhlování na deset platných číslic:

$$a_0 = 2 \cdot 10^2 = 200;$$

$$a_1 = \frac{1}{2}a_0 + \frac{s}{a_0} = \frac{1}{2} \left(200 + \frac{28977}{200} \right) = 172,4425;$$

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{s}{a_1} = \frac{1}{2} \left(172,4425 + \frac{28977}{172,4425} \right) \doteq 170,2405608;$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{s}{a_2} = \frac{1}{2} \left(170,2405608 + \frac{28977}{170,2405608} \right) \doteq 170,2263205;$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{s}{a_3} = \frac{1}{2} \left(170,2263205 + \frac{28977}{170,2263205} \right) \doteq 170,2263199.$$

Metodu zastavíme v okamžiku, kdy se vypočtená aproximace ustálí, platí $a_5 \doteq a_4$.

2.3 Newtonova metoda tečen

Newtonova metoda je iterační metoda, která se používá k numerickému řešení rovnice

$$g(x) = 0,$$

kde funkce $g(x)$ na levé straně je zpravidla nelineární v proměnné x . V češtině se pro ni používají také názvy Newtonova–Raphsonova metoda nebo metoda tečen, viz [2]. Pro názornost si detailně vysvětlíme princip této metody na výše uvedené rovnici. Jak napovídá poslední uvedený název, princip této metody spočívá v hledání přibližné polohy průsečíku grafu funkce $y = g(x)$ s vodorovnou osou ($y = 0$) tak, že funkci v nějakém bodě $\tilde{x}$ nahradíme tečnou této funkce v tomto bodě. Místo hledání průsečíku nelineární funkce hledáme průsečík tečny popsany lineární funkcí. Použití této metody je možné pouze za určitých technických předpokladů (které však v našem případě budou splněny), zejména musí být funkce $g(x)$ spojitá a hladká.

2.3.1 Konstrukce tečny a přibližného řešení

Tečna ke grafu funkce $g(x)$ v bodě $\tilde{x}$ bude obecně dána předpisem

$$t : y = k \cdot x + q,$$

kde zřejmě

$$k = g'(\tilde{x}),$$

protože derivace určuje směrnici tečny v daném bodě. Pro nalezení hodnoty q stačí dosadit jeden bod na tečnu. Konkrétně můžeme dosadit bod $[\tilde{x}, g(\tilde{x})]$. Dostaneme tak rovnici

$$g(\tilde{x}) = g'(\tilde{x}) \cdot \tilde{x} + q,$$

tedy

$$q = g(\tilde{x}) - g'(\tilde{x}) \cdot \tilde{x}.$$

Tečna je tedy již určena celá, je dána rovnicí

$$\begin{aligned} t : y &= g'(\tilde{x}) \cdot x + g(\tilde{x}) - g'(\tilde{x}) \cdot \tilde{x} \\ &= g'(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x}) + g(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Hledání kořene rovnice $g(x) = 0$ tím nahradíme hledáním kořene lineární rovnice $t(x) = 0$, tj.

$$g'(\tilde{x}) \cdot (x - \tilde{x}) + g(\tilde{x}) = 0.$$

Dostaneme tak

$$x = \tilde{x} - \frac{g(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}, \quad (2.9)$$

což je hledané přibližné řešení.

2.3.2 Iterační schéma

Celý proces začneme nějakou počáteční hodnotou x_0 , nejlépe takovou v jejíž blízkosti hledáme řešení (co znamená blízkost zde nebudeme řešit, může to souviset např. s monotonií funkce). Výše uvedenou konstrukci přibližného řešení (2.9) budeme opakovat v (potenciálně nekončném) cyklu. Dostaneme tak posloupnost přibližných řešení

$$x_0, x_1, x_2, \dots$$

kde

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})}.$$

V ideálním případě bude posloupnost $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergentní a její limitou bude hledané řešení rovnice $g(x) = 0$.

2.3.3 Nalezení odmocniny pomocí Newtonovy metody

My se nyní pokusíme aplikovat Newtonovu metodu na výpočet druhé odmocniny z čísla s . Zřejmě platí, že hledaná odmocnina je kořenem rovnice

$$x^2 - s = 0.$$

Do Newtonovy metody tedy bude vstupovat funkce

$$g(x) = x^2 - s.$$

Zřejmě

$$g'(x) = 2x.$$

Dosadíme do obecného vzorce, dostaneme tak vztah

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - s}{2x_{n-1}}.$$

Po úpravě

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{s}{x_{n-1}} \right)$$

získáváme rekurentní formuli. Je-li, tak jako v předchozí kapitole $s = a^2 + b$, pak jako počáteční odhad řešení můžeme zvolit $x_0 = a$. Vidíme, že jsme dostali stejný rekurentní vztah jako u babylonské metody, viz (2.1), tedy:

Babylonská metoda výpočtu odmocniny & Newtonova metoda použitá na funkci $g(x) = x^2 + s$ jsou totéž.

Jako příklad výpočtu odmocniny z s pomocí Newtonovy tedy můžeme použít již dříve prezentovaný příklad 1.

2.4 Taylorova metoda

Taylorova metoda, jak už název sám napovídá, je založena na aproximaci odmocniny pomocí Taylorova rozvoje. Pro úplnost připomeneme příslušnou větu z analýzy

Věta 1 (Taylorova věta [10]). *Nechť $f(x)$ je reálná funkce jedné reálné proměnné a nechť má tato funkce v nějakém ε -okolí bodu $\tilde{x}$ alespoň n derivací. Potom existuje právě jeden polynom $T_n(x)$ stupně nejvýše n takový, že*

$$T_n^{(k)}(\tilde{x}) = f^{(k)}(\tilde{x}) \quad \text{pro každé } k = 0, 1, \dots, n,$$

kde $f^{(k)}(x)$ je k -tá derivace $f(x)$, $f^{(k)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k-1)}(x)$ a $f^{(0)}(x) = f(x)$. Tento polynom má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(\tilde{x})}{k!} (x - \tilde{x})^k \quad (2.10)$$

a nazýváme jej n -tý Taylorův polynom funkce $f(x)$ v bodě $\tilde{x}$.

Náznak důkazu. Uvažujme polynom p stupně nanejvýš n ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^n b_k (x - \tilde{x})^k, \quad \text{kde} \quad b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}.$$

Jeho ℓ -násobným zderivováním dostaneme

$$p^{(\ell)}(x) = \sum_{k=\ell}^n b_k \cdot k(k-1)\cdots(k-\ell+1) \cdot (x - \tilde{x})^{k-\ell} = \sum_{k=\ell}^n b_k \frac{k!}{(k-\ell)!} (x - \tilde{x})^{k-\ell}$$

a dosazením bodu $\tilde{x}$ dostaneme $p^{(\ell)}(\tilde{x}) = b_\ell \ell!$. Hledáme polynom, pro který by ℓ -tá derivace v bodě $\tilde{x}$ byla rovna ℓ -té derivaci funkce $f(x)$ v bodě $\tilde{x}$ pro všechna $\ell = 0, 1, \dots, n$. Musí tedy platit

$$b_\ell \ell! = f^{(\ell)}(\tilde{x}) \quad \text{neboli} \quad b_\ell = \frac{f^{(\ell)}(\tilde{x})}{\ell!} \quad \text{pro každé} \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

Koeficienty b_ℓ jsou zjevně jednoznačně určeny, tedy existuje jediný polynom hledaných vlastností. $\square$

Protože funkce $f(x)$ a její Taylorův polynom $T_n(x)$ se chovají stejně, přesněji řečeno mají stejné derivace až do řádu n v bodě x_0 , kde jsme prováděli rozvoj, bude se Taylorův polynom v jistém smyslu chovat podobě jako původní funkce i v nejbližším okolí bodu x_0 . To bude podstatou konstrukce algoritmu pro výpočet odmocniny.

Poznámka 2 (Taylorův vzorec). *Nechť má nyní funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$. Pak pro všechna x z tohoto okolí platí tzv. Taylorův vzorec*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

kde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

přičemž ξ , je nějaké vhodné číslo ležící mezi x_0 a x . Funkce $R_n(x)$ se nazývá zbytek nebo chyba Taylorova polynomu. Zbytek zde uvedený je v tzv. Lagrangeově tvaru, což není jediná možnost jeho vyjádření.

Poznámka 3 (Taylorova a Maclaurinova řada). *Je-li funkce v okolí bodu x_0 nekonečně hladká (tedy má nekonečně mnoho derivací), můžeme funkci v tomto bodě rozvinout do tzv. Taylorovy řady. Pak pro všechna x z vhodného okolí bodu x_0 platí*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Okolí bodu x_0 , ve kterém rovnost platí, se nazývá poloměr konvergence Taylorovy řady. Tento poloměr závisí na x_0 .

Pro $x_0 = 0$ tak dostáváme speciální případ Taylorovy řady, tzv. Maclaurinovu řadu, která je tvaru

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

2.4.1 Taylorova metoda prvního stupně pro výpočet odmocniny

Nyní se pokusíme odvodit algoritmus (opět to bude rekurentní vzorec) pro přibližný výpočet odmocniny založený na Taylorově polynomu. Lze se domnívat, že použití různých polynomů v ideálním případě ovlivní rychlost výpočtu příslušnou metodou (přesněji řád konvergence metody). V ideálním případě tak, že čím více členů polynomu použijeme, tím rychlejší metoda bude. Začneme s polynomem stupně jedna, tedy s polynomem, který má dva členy. Ukážeme, že v tomto případě je Taylorova metoda identická s babylonskou metodou.

Pro naše další uvažování položíme $f(x) = \sqrt{x}$ a zkonstruujeme nejprve polynom stupně jedna. Pro přehlednost budeme u Taylorova polynomu značit dalším dolním indexem bod, ve kterém funkci rozvíjíme. Dostaneme tak

$$\begin{aligned} T_{1,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= (x_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x_0)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0) \\ &= \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Z pohledu výpočtu odmocniny z čísla s , kterou navíc máme aproximovanou číslem a (viz (2.2)), budeme funkci rozvíjet do polynomu v bodě, kde funkci umíme vyčíslit, tedy v bodě a^2 a budeme doufat, že bod s bude ležet ve vhodném okolí (např. z pohledu poloměru konvergence Taylorovy řady). Získáme tak výraz

$$T_{1,a^2}(s) = \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s - a^2}{\sqrt{a^2}} = a + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{a} - \frac{a^2}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{s}{a} \right). \quad (2.11)$$

Možná s překvapením zjišťujeme, že jsme dostali opět stejný vztah. Přesněji řečeno:

Aproximace odmocniny z čísla s spočtená pomocí Taylorova polynomu prvního stupně zkonstruovaného v bodě a^2 nám dá identický výsledek jako první krok babylonské metody resp. Newtonovy metody aplikované na rovnici $x^2 - s = 0$, v obou případech s počátečním odhadem a .

Jako příklad výpočtu odmocniny bychom tedy i zde mohli použít již dříve prezentovaný příklad 1.

Poznamenejme nyní, že souvislost mezi Newtonovou a Taylorovou metodou prvního stupně (byť jedna slouží k nalezení kořene rovnice a druhá k vyčíslení funkční hodnoty) je obecný a vrátíme se k němu v následující sekci. Zároveň můžeme tento vztah vnímat jako ospravedlnění následující úvahy: V případě Taylorova polynomu prvního stupně můžeme vyčíslení funkční hodnoty pomocí tohoto polynomu zřetěžit do iteračního schématu (odpovídajícího právě babylonské resp. Newtonově metodě). Můžeme se pokusit o analogické zřetěžení vyčíslení funkční hodnoty i pomocí Taylorova polynomu vyššího stupně (tj. pokusíme se to provést bez dalších důkazů např. konvergence takto generované posloupnosti).

2.4.2 Newtonova metoda a metoda využívající Taylorova polynomu prvního stupně pro obecnou funkci $f(x)$

Viděli jsme, že pro odhad odmocniny z čísla $s = a^2 + b$ nám Taylorův polynom prvního stupně rozvinutý v bodě a^2 dal zcela identický výsledek jako první krok Newtonovy metody použité na rovnici $x^2 - s = 0$ s počátečním odhadem $x_0 = a$. Nyní zkusíme naznačit, že tento vztah není náhodný, ale platí obecně.

Tabulka 2.1: Převedení aproximace funkční hodnoty pomocí Taylorova polynomu prvního stupně na Newtonovu metodu. Porovnání pro $\sqrt{x}$ a obecné $f(x)$.

funkce, kterou budeme vyčíslovat	$\sqrt{x}$	$f(x)$
funkci budeme vyčíslovat v bodě s	$s = a^2 + b$	$s = f^{-1}(a) + b$
funkční hodnotu v bodě $s - b$ známe	$\sqrt{s - b} = a$	$f(s - b) = a$
vyčíslení lze převést na rovnici	$x^2 - s = 0$	$f^{-1}(x) - s = 0$
funkce na pravé straně rovnice	$g(x) = x^2 - s$	$g(x) = f^{-1}(x) - s$

Místo vyčíslování funkci $\sqrt{x}$ v bodě s bychom rádi vyčíslili funkci $f(x)$. Funkci v bodě s však obecně vyčíslit neumíme, ale umíme vyčíslit v nějakém blízkém okolí, v prvním případě to byl bod a^2 , $\sqrt{a^2} = a$ (čísla s i a byla kladná), nyní to bude v bodě $f^{-1}(a)$, $f(f^{-1}(a)) = a$ (předpokládáme pro jednoduchost, že inverze existuje). Číslem b budeme vyjadřovat rozdíl mezi oběma body, konkrétně $s = a^2 + b$ v prvním a $s = f^{-1}(a) + b$ v druhém případě, viz také tabulka 2.1.

Newtonova metoda pro $f(x)$

Newtonova metoda použitá k vyčíslení $\sqrt{s}$ byla aplikována na rovnici $x^2 - s = 0$. Vedla pak na iterační vztah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - s}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{s}{x_n} \right).$$

Nyní se podíváme na iterační schéma pro obecnou funkci $f(x)$. Newtonovou metodou budeme chtít vyčíslit $f(s)$, budeme ji tedy aplikovat na rovnici

$$f^{-1}(x) - s = 0.$$

Připomeňme však nejprve vztah pro derivaci inverzní funkce

$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Zřejmě pak dostaneme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{(f^{-1}(x_n) - s)}{(f^{-1}(x_n) - s)'} = x_n - (f^{-1}(x_n) - s) \cdot f'(f^{-1}(x_n)). \quad (2.12)$$

Taylorova metoda pro $f(x)$

Zkonstruujeme-li naopak Taylorův polynom první funkce $f(x)$ v bodě $\tilde{x}$ dostaneme

$$f(x) \approx f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}).$$

Pokud funkci rozvíjíme konkrétně v bodě $\tilde{x} = f^{-1}(a)$, kde ji umíme vyčíslit, dostaneme po drobné úpravě

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(f^{-1}(a)) + f'(f^{-1}(a)) \cdot (x - f^{-1}(a)) \\ &\approx a - (f^{-1}(a) - x) \cdot f'(f^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Přibližná hodnota funkce f v bodě s je tedy

$$f(s) \approx a - (f^{-1}(a) - s) \cdot f'(f^{-1}(a)). \quad (2.13)$$

Porovnání obou metod

Porovnáním obou vztahů (2.12) a (2.13)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - (f^{-1}(x_n) - s) \cdot f'(f^{-1}(x_n)), \\ f(s) &\approx a - (f^{-1}(a) - s) \cdot f'(f^{-1}(a)) \end{aligned}$$

se jejich souvislost stane zřejmou.

2.4.3 Taylorova metoda druhého stupně pro výpočet odmocniny

Nyní se pokusíme odvodit vztah pro přibližný výpočet odmocniny založený na Taylorově polynomu druhého stupně,

$$\begin{aligned} T_{2,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &= (x_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x_0)^{-\frac{1}{2}}(x - x_0) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_0)^{-\frac{3}{2}}(x - x_0)^2 \\ &= \sqrt{x_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{x_0^3}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nyní budeme postupovat jako v případě polynomu prvního stupně. Taylorův polynom druhého stupně tedy rozvineme v bodě a^2 a dosadíme do něj číslo s ($s = a^2 + b$) jehož odmocninu hledáme

$$T_{2,a^2}(s) = \sqrt{a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s - a^2}{\sqrt{a^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{(s - a^2)^2}{\sqrt{(a^2)^3}} = \frac{1}{8} \left(3a + \frac{6s}{a} - \frac{s^2}{a^3} \right). \quad (2.15)$$

Dostali jsme tak *konečně nový* vztah pro přibližný výpočet odmocniny.

Zkusme ho podobně, jak již bylo výše naznačeno, interpretovat jako iterační metodu analogicky, jako jsme Taylorův polynom prvního stupně interpretovali

jako babylonskou, resp Newtonovu iterační metodu. Dostaneme tak algoritmus, který můžeme schematicky zapsat následujícím způsobem

$$a_0 \approx \sqrt[2]{s},$$

$$a_n = \frac{1}{8} \left(3a_{n-1} + \frac{6s}{a_{n-1}} - \frac{s^2}{a_{n-1}^3} \right).$$

Otázkou zůstává, zda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existuje a zda je rovna $\sqrt{s}$. Snadno lze ověřit, že $\pm\sqrt{s}$ (a $\pm\infty$) jsou stacionární body rekurentního vztahu. Konvergenci se pokusíme ilustrovat alespoň na následujících příkladech.

Příklad 2. Zkusme vypočítat odhad druhé odmocniny z čísla $f(x) = \sqrt{s}$, kde $s = 28977$. Stejně jako v příkladu viz (1) volíme počáteční odhad $a = 200$. Dosadíme do vztahu pro výpočet druhého stupně Taylorovy metody.

$$T_{2,a^2}(s) = \frac{1}{8} \left(3a + \frac{6s}{a} - \frac{s^2}{a^3} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(3 \cdot 200 + \frac{6 \cdot 28977}{200} - \frac{28977^2}{200^3} \right)$$

$$\doteq 170,5439605$$

Příklad 3. Zkusíme nyní použít Taylorův polynom druhého stupně iteračně. Tedy použít odvozený rekurentní vztah pro výpočet téhož příkladu, tj. $f(x) = \sqrt{s}$, kde $s = 28977$. Během výpočtu provádíme zokrouhlování na deset platných číslic:

$$a_0 = 200;$$

$$a_1 = \frac{1}{8} \left(3 \cdot 200 + \frac{6 \cdot 28977}{200} - \frac{28977^2}{200^3} \right) \doteq 170,5439605;$$

$$a_2 = \frac{1}{8} \left(3 \cdot 170,5439605 + \frac{6 \cdot 28977}{170,5439605} - \frac{28977^2}{170,5439605^3} \right) \doteq 170,2229455;$$

$$a_3 = \frac{1}{8} \left(3 \cdot 170,2229455 + \frac{6 \cdot 28977}{170,2229455} - \frac{28977^2}{170,2229455^3} \right) \doteq 170,2263199;$$

$$a_4 = \frac{1}{8} \left(3 \cdot 170,2263199 + \frac{6 \cdot 28977}{170,2263199} - \frac{28977^2}{170,2263199^3} \right) \doteq 170,2263199.$$

Vidíme, že v tomto konkrétním případě konverguje schéma rychleji než v použití babylonské metody. Hodnota se ustálí už při třetí iteraci, zatímco u Babylonské metody až při čtvrté, viz příklad 1.

2.4.4 Taylorova metoda k -tého stupně pro výpočet odmocniny

Podíváme-li se na vzorce

$$T_{1,a^2}(s) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{s}{a} \right), \quad T_{2,a^2}(s) = \frac{1}{8} \left(3a + \frac{6s}{a} - \frac{s^2}{a^3} \right),$$

které vyjadřují přibližnou hodnotu funkce v bodě s , vidíme, že se koeficienty liší. Přestože se jedná o Taylorovy polynomy téže funkce v témže bodě $T_{k,a^2}(s)$, druhý by tedy měl být zpřesněním prvního. (Např. konstantní člen polynomu je $\frac{1}{2}a$ pro $k = 1$, respektive $\frac{3}{8}a$ pro $k = 2$. Koeficient u lineárního členu je $\frac{1}{2a}$ pro $k = 1$, respektive $\frac{3}{4a}$ pro $k = 2$, atd.)

Oba vzorce vyjadřují odhad odmocniny pomocí polynomu $T_\star(s)$ v proměnné s , což je číslo, které chceme odmocnit. Dosadíme-li však $a^2 + b$ za s (připomeňme, že $s = a^2 + b$) dostaneme tak nové polynomy $P_\star(b) \equiv T_\star(a^2 + b)$ v proměnné b . Konkrétně, pro polynom stupně jedna dostaneme:

$$\begin{aligned} T_{1,a^2}(s) &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{s}{a} \right), \\ P_{1,a^2}(b) &\equiv T_{1,a^2}(a^2 + b) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a^2 + b}{a} \right), \\ P_{1,a^2}(b) &= a + \frac{b}{2a}. \end{aligned}$$

Podobně pro polynom stupně dva:

$$\begin{aligned} T_{2,a^2}(s) &= \frac{1}{8} \left(3a + \frac{6s}{a} - \frac{s^2}{a^3} \right), \\ P_{2,a^2}(b) &\equiv T_{2,a^2}(a^2 + b) = \frac{1}{8} \left(3a + \frac{6(a^2 + b)}{a} - \frac{(a^2 + b)^2}{a^3} \right), \\ P_{2,a^2}(b) &= a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že u polynomů $P_{k,a^2}(b)$,

$$P_{1,a^2}(b) = a + \frac{b}{2a}, \quad P_{2,a^2}(b) = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3}$$

se již koeficienty s narůstajícím k nemění. Taylorův polynom je konstruován právě v „rozdílové proměnné“ $(x - x_0)$, viz (2.10). Zde je rozdílovou proměnnou právě $s - a^2 = b$.

S využitím polynomů $P_\star(b)$ tedy můžeme z Taylorova polynomu, a tedy i iterační metody stupně $k - 1$, snadno zkonstruovat polynom, resp. metodu využívající polynomy stupně k . Dopočítáme-li obecnou derivaci, získáme polynom $P_{k,a^2}(b)$ ve tvaru

$$P_{k,a^2}(b) = \sum_{\ell=0}^k \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot \frac{b^\ell}{a^{2\ell-1}} = \left(a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \frac{5b^4}{128a^7} + \dots \right).$$

Taylorova řada druhé odmocniny rozvinutá v bodě a^2 pak nabývá tvaru

$$\sqrt{s} = \sqrt{a^2 + b} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot \frac{b^\ell}{a^{2\ell-1}}. \quad (2.16)$$

Tento výsledek není až tak překvapivý, jak se nyní pokusíme naznačit.

Vynásobme nejprve Taylorovu řadu druhé odmocniny (2.16) výrazem $\frac{1}{a}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \sqrt{s} = \sqrt{a^2 + b} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot \frac{b^\ell}{a^{2\ell-1}}, & \Big/ \cdot \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} \cdot \sqrt{a^2 + b} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot \frac{b^\ell}{a^{2\ell}}, \\ \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right)^\ell. \end{aligned}$$

Označíme-li nyní výraz $x = \frac{b}{a^2}$, dostáváme

$$\sqrt{1+x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{(1-2\ell)(\ell!)^2 4^\ell} \cdot x^\ell,$$

což je velmi dobře známá Maclaurinova řada funkce $\sqrt{1+x}$, viz např. [9], [6].

Zároveň je známo viz např. [6], že tato Maclaurinova řada konverguje pouze pro

$$\frac{b}{a^2} = x \in (-1, 1).$$

Pro $b > 0$ tedy musí platit

$$0 \leq \frac{b}{a^2} < 1$$

neboli

$$0 \leq b < a^2, \quad \text{přičemž víme, že} \quad s = a^2 + b.$$

Vidíme, že tato podmínka je snadno splněná, pokud a^2 je rozumně blízko s . Tato podmínka by pro nás byla užitečná při konstrukci iteračního algoritmu postaveném právě na Taylorově polynomu k -tého stupně.

2.5 Bakhshaliho metoda

Tato metoda nalezení aproximace druhé odmocniny byla popsána ve starověkém rukopisu zvaném *Bakhshaliho rukopis*, viz [3]. Odpovídá dvěma po sobě jdoucím iteracím babylonské metody začínající s počátečním odhadem a_0 . Algoritmus je kvadraticky konvergentní, což znamená, že počet správných číslic aproximace se při každé iteraci zhruba čtyřnásobí. Chceme tedy vypočítat $\sqrt{s}$, opět budeme pracovat se schématem $s = a^2 + b$, tedy, že číslo umíme částečně odmocnit (a je naše

částečná odmocnina). Nejprve nalezneme přirozené číslo a_0 takové, že a_0^2 je nějakou aproximací s , tedy jako obvykle

$$s = a_0^2 + b_0.$$

Obvykle uvažujeme takovou aproximaci, že $a_0^2 \leq s < (a_0 + 1)^2$, tedy $b_0 = s - a_0^2 \geq 0$. Metoda pak z obecně n -té, $n = 0, 1, 2, \dots$, aproximace zkonstruuje

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{s - a_n^2}{2a_n}, \\ v_{n+1} &= a_n + u_{n+1}, \\ a_{n+1} &= v_{n+1} - \frac{u_{n+1}^2}{2v_{n+1}}. \end{aligned}$$

Tím získáme nový, snad lepší, odhad odmocniny, $\sqrt{s} \approx a_{n+1}$.

Rozepsáním tohoto kroku dostaneme

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= v_{n+1} - \frac{u_{n+1}^2}{2v_{n+1}} = (a_n + u_{n+1}) - \frac{u_{n+1}^2}{2(a_n + u_{n+1})} = \left(a_n + \frac{s - a_n^2}{2a_n} \right) - \frac{\left(\frac{s - a_n^2}{2a_n} \right)^2}{2\left(a_n + \frac{s - a_n^2}{2a_n} \right)} \\ &= a_n + \frac{s - a_n^2}{2a_n} - \frac{(s - a_n^2)^2}{4a_n(2a_n^2 + (s - a_n^2))} = \frac{8a_n^4 + 8a_n^2(s - a_n^2) + (s - a_n^2)^2}{8a_n^3 + 4a_n(s - a_n^2)} \\ &= \frac{a_n^4 + 6a_n^2 + s^2}{4a_n(a_n^2 + s)}. \end{aligned}$$

Abychom ukázali, že metoda skutečně funguje, vezmeme si na pomoc babylonskou metodu.

Nechť je n -tá přibližná odmocnina spočtená babylonskou a Bakhshaliho metodou stejná (kroky Babylonské metody budeme označovat s vlnkou, bez vlnky jsou kroky Bakhshaliho metody), tj.

$$\tilde{a}_n = a_n$$

pak

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_n + \frac{s}{\tilde{a}_n} \right) = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{s}{a_n} \right) = \frac{a_n^2 + s}{2a_n^2}$$

a

$$\tilde{a}_{n+2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_{n+1} + \frac{s}{\tilde{a}_{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_n^2 + s}{2a_n^2} + \frac{s(2a_n^2)}{a_n^2 + s} \right) = \frac{a_n^4 + 6a_n^2 + s^2}{4a_n(a_n^2 + s)}.$$

Ukázali jsme tedy, že

$$a_n = \tilde{a}_n \implies a_{n+1} = \tilde{a}_{n+2},$$

tedy, že:

Jeden krok Bakhshaliho metody přesně opovídá dvěma po sobě jdoucím krokům babylonské metody.

Příklad 4. Můžeme tedy opět odkázat na příklad 1, ze kterého vezmeme každý druhý krok. Pro názornost však výpočet provedeme přímo Bakhshaliho algoritmem. Hledáme tedy $\sqrt{s}$, kde $s = 28977$. Jako počáteční odhad vezmeme $a_0 = 200$. Během výpočtu provádíme zokrouhlování na deset platných číslic:

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{28977 - 200^2}{2 \cdot 200} = -27,5575, \\v_1 &= 200 + (-27,5575) = 172,4425, \\a_1 &= 172,4425 - \frac{(-27,5575)^2}{2 \cdot 172,4425} \doteq 170,2405608.\end{aligned}$$

Podobně druhá iterace

$$\begin{aligned}u_2 &= \frac{28977 - 170,2405608^2}{2 \cdot 170,2405608} \doteq -0,014240250, \\v_2 &= 170,2405608 + (-0,014240250) \doteq 170,2263205, \\a_2 &= 170,2263205 - \frac{(-0,014240250)^2}{2 \cdot 170,2263205} \doteq 170,2263199.\end{aligned}$$

Je vidět, že vypočtené aproximace a_1 a a_2 (zde) a $\tilde{a}_2$ a $\tilde{a}_4$ (v příkladu 1) jsou i numericky stejné.

2.6 Metoda řetězových zlomků

Jednou z možností, jak vyjádřit odmocniny, je metoda řetězových zlomků. Řetězovým zlomkem čísla x rozumíme výraz typu

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{x_n}}}}}.$$

Abychom se vyhnuli psaní nepřehledných a velkých vzorců, častěji používáme kompaktnější zápis zlomku

$$x = [x_0; x_1, x_2, \dots, x_n].$$

V tomto případě se jedná speciálně o tzv. *konečný řetězový zlomek*. Číslo x_0 nazýváme *celočíselnou částí zlomku*, proto je v zápise od zbytku čísel odděleno jinak.

Obecně však můžeme (a budeme) uvažovat i nekonečné výrazy

$$x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4 + \cdots}}}}$$

popsané nekonečnou posloupností

$$[x_0; x_1, x_2, x_3, x_4, \dots].$$

Hodnota takového nekonečného výrazu je pak definovaná jako limita

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [x_0; x_1, \dots, x_n],$$

tedy jako limita posloupnosti konečných řetězových zlomků

$$x_0, \quad x_0 + \frac{1}{x_1}, \quad x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2}}, \quad x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3}}}, \quad x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3 + \frac{1}{x_4}}}}, \quad \dots,$$

ovšem *pokud tato limita existuje*. Tyto výrazy nazýváme *nekonečné řetězové zlomky*.

Konečný řetězový zlomek $[x_0; x_1, x_2, \dots, x_n]$ můžeme interpretovat jako nekonečný řetězový zlomek $[x_0; x_1, x_2, x_3, \dots]$, pro který platí $x_j = 0$ pro $j > n$. My však budeme pracovat téměř výhradně s nekonečnými řetězovými zlomky.

Řekneme, že *řetězový zlomek je periodický*, pokud existuje takové $N \in \mathbb{N}$ a $d \in \mathbb{N}$, že $x_j = x_{j-d}$ pro každé $j > N$. Pokud d je nejmenší přirozené číslo s touto vlastností, nazýváme ho délkou periody. Pro $N = 5$ a $d = 3$ tedy dostaneme

$$[x_0; x_1, x_2, \underbrace{x_3, x_4, x_5}, \underbrace{x_3, x_4, x_5}, \underbrace{x_3, x_4, x_5}, \dots] = [x_0; x_1, x_2, \overline{x_3, x_4, x_5}].$$

Schematicky to značíme nadtržením, jako u periodických čísel. Konečný řetězový zlomek je tedy speciální případ periodického zlomku. Řetězový zlomek, který není periodický, nazýváme *aperiodický*.

2.6.1 Reálná čísla a řetězové zlomky

Důležitým poznatkem z matematické analýzy je, že všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako řetězové zlomky

$$x = [x_0; x_1, x_2, x_3, \dots], \quad \text{kde} \quad x_0 \in \mathbb{Z}, \quad x_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Navíc platí následující rozdělení (viz např. [5], nebo [11]):

$$\text{Pro } x \in \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Q} \\ \mathbb{K} \\ \mathbb{R} \setminus (\mathbb{K} \cup \mathbb{Q}) \end{array} \right\} \text{ existuje } \left\{ \begin{array}{l} \text{konečný} \\ \text{nekonečný periodický} \\ \text{nekonečný aperiodický} \end{array} \right\} \text{ řetězový zlomek,}$$

kde množina $\mathbb{K}$ zde značí množinu tzv. *kvadratických iracionalit*, tj. čísel ve tvaru

$$\frac{p \pm \sqrt{n}}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Tedy např. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, nebo $5 + 2\sqrt{3} = 5 + \sqrt{12}$, nebo právě námi hledaná $\sqrt{28977}$.

2.6.2 Sblížené zlomky

Mějme řetězový zlomek ve tvaru $[x_0; x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]$. Bude nás zajímat, jak vypadá posloupnost tzv. *sblížených zlomků*, tj. zlomků $[x_0; x_1, \dots, x_n] = \frac{p_n}{q_n}$, kde $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, pro $n = 1, 2, \dots$

Kdybychom tyto zlomky počítali přímou úpravou, bylo by to velmi pracné. Zkusíme najít jinou, lepší, cestu. Nejprve však začneme právě přímou cestou. První čtyři zlomky vypadají takto

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{x_0}{1} \\ x_0 + \frac{1}{x_1} &= \frac{x_1 x_0 + 1}{x_1} \\ x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2}} &= \frac{x_2(x_1 x_0 + 1) + x_0}{x_2 x_1 + 1} \\ x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3}}} &= \frac{x_3(x_2(x_1 x_0 + 1) + x_0) + x_1 x_0 + 1}{x_3(x_2 x_1 + 1) + x_1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Výrazy na pravých stranách představují hledané sblížené zlomky. Označme tedy tyto zlomky $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}$, atd. a zkusme najít nějaký (rekurentní) předpis pro n -tý sblížený zlomek. Pomineme-li první dva zlomky

$$\frac{x_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}, \quad \frac{x_1 x_0 + 1}{x_1} = \frac{p_1}{q_1},$$

vidíme, že sblížené zlomky obsahují čitatele a jmenovatele zlomků předchozích.

Konkrétně

$$\frac{x_2 \overbrace{(x_1 x_0 + 1)}^{p_1} + \overbrace{x_0}^{p_0}}{\underbrace{x_2}_{q_1} \underbrace{x_1 + 1}_{q_0}} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\frac{x_3 \overbrace{(x_2 \overbrace{(x_1 x_0 + 1)}^{p_2} + x_0)}^{p_2} + \overbrace{x_1 x_0 + 1}^{p_1}}{\underbrace{x_3 \overbrace{(x_2 x_1 + 1)}^{q_2}} + \underbrace{x_1}_{q_1}} = \frac{p_3}{q_3}$$

$$\vdots$$

Vypadá to tedy, že pro počáteční hodnoty

$$p_0 = x_0, \quad p_1 = x_1 x_0 + 1, \quad (2.17)$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = x_1, \quad (2.18)$$

dostaneme vztahy

$$p_n = x_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad (2.19)$$

$$q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad (2.20)$$

pro $n \geq 2$. Důkaz lze provést snadno matematickou indukcí, viz [5] a [11]. Tyto rekurentní vztahy pro nás budou užitečné pro výpočet sblížených zlomků – aproximací hledané odmocniny. Konkrétní výpočet nejprve naznačíme obecně a pak ukážeme opět na našem příkladu.

2.6.3 Konstrukce řetězového zlomku pro $\sqrt{s}$

Nejprve však musíme řetězový zlomek zkonstruovat. Uvažujme naše číslo s opět ve tvaru

$$s = a^2 + b,$$

tedy $a \approx \sqrt{s}$ je nějaká přirozená aproximace odmocniny z s . Odmocnění celého vztahu můžeme aproximaci zlepšit následujícím způsobem

$$\sqrt{s} = \sqrt{a^2 + b} = a + \left(\sqrt{a^2 + b} - a \right) = a + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b} - a} \right)} = a + \frac{1}{\varrho},$$

kde $\varrho = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b} - a}$ můžeme vnímat jako jakési reziduum.

Nyní toto reziduum ϱ upravíme do podoby zlomku, a to tak, aby nový výraz opět obsahoval ϱ , nejsnáze vhodným rozšířením

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b} - a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{\sqrt{a^2 + b} + a} = \frac{\sqrt{a^2 + b} + a}{b} = \frac{2a + \sqrt{a^2 + b} - a}{b} \\ &= \frac{2a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + b} - a}{b} = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b} - a} \right)} = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b\varrho}. \end{aligned}$$

Nyní tedy máme vztah

$$\varrho = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b\varrho},$$

jehož opakovanou aplikací vygenerujeme celý řetězový zlomek. Než však začneme, složíme nejprve tento výraz jednou sám se sebou. Dostaneme tak

$$\varrho = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b\varrho} = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b\left(\frac{2a}{b} + \frac{1}{b\varrho}\right)} = \frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{\varrho}}$$

celou periodu řetězového zlomku, neboť v posledním jmenovateli je již jen ϱ .

Celkově pak dostáváme

$$\begin{aligned}\sqrt{s} &= a + \frac{1}{\varrho} = a + \frac{1}{\frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{\varrho}}} = a + \frac{1}{\frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{\frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{\frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{\varrho}}}}}}} \\ &= a + \frac{1}{\frac{2a}{b} + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{2a + \frac{1}{\varrho}}}}}}} = \dots\end{aligned}$$

tedy

$$\sqrt{s} = [x_0; x_1, x_2, x_1, x_2, \dots] = [x_0; \overline{x_1, x_2}] = [a; \overline{2a/b, 2a}].$$

Příklad 5. *Příklad výpočtu $\sqrt{s}$ provedeme opět pro $s = 28977$. Jako počáteční odhad opět vezmeme náš ne-příliš dobrý odhad*

$$a = 200.$$

Pak platí

$$s = 28977 = 200^2 - 11023, \quad \text{tedy} \quad b = -11023.$$

Pro naše ϱ , resp. periodu dostaneme ve tvaru

$$\varrho = -\frac{2 \cdot 200}{11023} - \frac{1}{11023\varrho} = -\frac{2 \cdot 200}{11023} + \frac{1}{2 \cdot 200 + \frac{1}{\varrho}}$$

a tedy

$$\sqrt{28977} = 200 - \frac{1}{\frac{\frac{400}{11023} + \frac{1}{400 - \frac{1}{\frac{\frac{400}{11023} + \frac{1}{400 - \frac{1}{\frac{\frac{400}{11023} + \frac{1}{400 + \dots}}}}}}}}}}$$

tedy

$$\sqrt{s} = \left[200; -\frac{400}{11023}, 400 \right].$$

Nyní zkusíme vyčíslit několik prvních sblížených zlomků $\frac{p_n}{q_n}$, respektive jejich čitatele p_n a jmenovatele q_n pomocí vztahů (2.17)–(2.20), viz tabulka 2.2.

Jak vidíme z tabulky, pro $n > 9$ se aproximace odmocniny zaokrouhlená na prvních deset platných cifer již nemění. Také vidíme, že hodnoty hodně oscilují (dokonce mění znaménka) a čitatele i jmenovatele v absolutní hodnotě rostou. Takový výpočet může být potenciálně nestabilní. Zde je to dáno mj. i naší „nevhodnou“ volbou počáteční podmínky. V praxi by se počáteční aproximace jistě dala odhadnout lépe.

Povšimněme si na závěr, že jsme našli řetězový zlomek námi hledané odmocniny $\sqrt{28977}$, ovšem ne s přirozenými koeficienty, nýbrž s racionálními. To nám ale nevadí. S racionálními čísly počítat umíme. Celočíselný zlomek se dá spočítat zpětně ze znalosti odmocniny pomocí tzv. Eukleidova algoritmu, což nebudeme blíže rozepisovat. Na rozdíl od našeho postupu, kdy jsme vždy dostali periodu délky nejvýše dva, v případě celočíselného zlomku mohou být periody delší. Pomocí softwaru *Wolfram Mathematica 9.0* jsme spočetli, že v našem případě dostaneme periodu délky osmdesát

$$\begin{aligned} \sqrt{28977} = [170; & \overline{4, 2, 2, 1, 1, 3, 6, 2, 1, 1, 11, 6, 1, 6, 4, 3, 1, 1, 1, 2,} \\ & \overline{5, 1, 2, 2, 1, 20, 1, 1, 2, 1, 3, 5, 19, 1, 5, 7, 1, 2, 1, 112,} \\ & \overline{1, 2, 1, 7, 5, 1, 19, 5, 3, 1, 2, 1, 1, 20, 1, 2, 2, 1, 5, 2,} \\ & \overline{1, 1, 1, 3, 4, 6, 1, 6, 11, 1, 1, 2, 6, 3, 1, 1, 2, 2, 4, 340}]. \end{aligned}$$

Jen upozorníme, že rekurentní vztahy pro čitatele a jmenovatele sblížených zlomků (2.19) a (2.20) jsou také vztahy z Eukleidova algoritmu, jen indexované v opačném pořadí, než je obvyklé.

2.7 Algoritmus postupného výpočtu druhé odmocniny

Tento postup výpočtu druhé odmocniny byl součástí základního vzdělání na školách ještě ve 20. století. Připomíná postup, jakým dělíme dnes. Tento algoritmus odmocňování najdeme popsany již mnohem dříve v Číně a v Indii, do Evropy se dostal

Tabulka 2.2: Sblížené zlomky (a jejich čitatele a jmenovatele) čísla $\sqrt{28977}$.

n	p_n
0	200 = 200
1	$\frac{68977}{11023} \doteq -6,257552390$
2	$\frac{25386200}{11023} \doteq -2303,020956$
3	$\frac{9394146529}{121506529} \doteq 77,31392384$
4	$\frac{3477826529000}{121506529} \doteq 28622,54858$
5	$\frac{1287578934410833}{1339366469167} \doteq -961,3343055$
6	$\frac{476695491935166200}{1339366469167} \doteq -355911,1736$
7	$\frac{176485214180055867841}{14763836589627841} \doteq 11953,88564$
8	$\frac{65339471264421010113800}{14763836589627841} \doteq 442564,3082$
9	$\frac{24190391989861648214308657}{162741770727467691343} \doteq -148642,7970$
10	$\frac{8955919804196946491239045400}{162741770727467691343} \doteq -55031475,72$

n	q_n
0	1 = 1
1	$\frac{400}{11023} \doteq -0,03628776195$
2	$\frac{148977}{11023} \doteq -13,51510478$
3	$\frac{55181600}{121506529} \doteq 0,4541451431$
4	$\frac{20430466529}{121506529} \doteq 168,1429525$
5	$\frac{7563919834800}{1339366469167} \doteq -5,647386290$
6	$\frac{2800362901370833}{1339366469167} \doteq -2090,811563$
7	$\frac{1036768072209332800}{14763836589627841} \doteq 70,22348601$
8	$\frac{383838828621922427841}{14763836589627841} \doteq 25998,58284$
9	$\frac{142107236988805495682000}{162741770727467691343} \doteq -873,2068992$
10	$\frac{52611839387622747350708657}{162741770727467691343} \doteq -323284,1768$

n	p_n/q_n
0	200 = 200
1	$\frac{68977}{400} = 172,4425$
2	$\frac{25386200}{148977} \doteq 170,4034851$
3	$\frac{9394146529}{55181600} \doteq 170,2405608$
4	$\frac{3477826529000}{20430466529} \doteq 170,2274651$
5	$\frac{1287578934410833}{7563919834800} \doteq 170,2264120$
6	$\frac{476695491935166200}{2800362901370833} \doteq 170,2263273$
7	$\frac{176485214180055867841}{1036768072209332800} \doteq 170,2263205$
8	$\frac{65339471264421010113800}{383838828621922427841} \doteq 170,2263200$
9	$\frac{24190391989861648214308657}{142107236988805495682000} \doteq 170,2263199$
10	$\frac{8955919804196946491239045400}{52611839387622747350708657} \doteq 170,2263199$

až díky Arabům [4]. Je pomalejší než babylónská metoda, ale pro ruční a poloau-

tomatizované výpočty na mechanických kalkulátorech jednodušší – což pro nás bude důležité.

2.7.1 Základní princip

Základní princip celé metody stojí na známém vzorci pro kvadrát součtu. Odmocňované číslo s zcela jistě můžeme napsat ve tvaru

$$s = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

pro nějaké konkrétní a a b . Pokud nyní odmocninu $\sqrt{s}$ čísla s odhadnu hodnotou a , tj. $\sqrt{s} \approx a$. Je jasné, že jsme se dopustili nějaké chyby x , kterou neznáme. Můžeme se ale pokusit tuto chybu odhadnout. Platí

$$s - a^2 = 2ax + x^2 = (2a + x)x.$$

Dostáváme tedy (kvadratickou) rovnici pro x . Tu řešit neumíme – na to bychom potřebovali umět vypočítat odmocninu – nicméně se můžeme pokusit chybu odhadnout. Rovnice nám říká toto:

Vezmi odhad a a vynásob jej dvěma. K výsledku se pokus přičíst takové číslo x , aby součet po vynásobení číslem x byl roven, nebo co nejbližší číslu $s - a^2$.

Obecně asi nenajdeme takové x , aby nastala rovnost, ale nějaké $\tilde{x}$ takové, aby se alespoň

$$s - a^2 > s - a^2 - (2a + \tilde{x})\tilde{x} = s - (a + \tilde{x})^2$$

chyba zmenšila.

Formálně tedy můžeme přeznačit $a_0 = a$, $x_0 = x$, tj. $s = (a_0 + x_0)^2$, počáteční aproximací odmocniny tedy bude $\sqrt{s} \approx a_0$, nalézt přibližnou opravu stávající $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$ a položit $a_1 = a_0 + \tilde{x}_0$. A celý proces pak můžeme opakovat.

2.7.2 Praktický výpočet

Otázkou je, jak volit a a jak hledat přibližné řešení $\tilde{x}$. Trik spočívá v šikovném rozdělení čísla odmocniny na součet $\sqrt{s} = a + x$. Zapišeme-li toto číslo v desítkové soustavě,

$$\sqrt{s} = [d_k d_{k-1} \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots]_{10} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z} \cap (-\infty, k]} 10^\ell d_\ell,$$

kde d_ℓ je ℓ -tá cifra čísla $\sqrt{s}$, tj. $d_\ell \in \mathbb{N}$, $0 \leq d_\ell < 10$ a $d_k \neq 0$, pak součet zvolíme tak, aby

$$a = 10^k d_k, \quad x = [d_{k-1} \dots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots]_{10}.$$

Zde je důležité, že vždy platí

$$10^k > x$$

tedy první sčítanec je o řád vyšší než druhý. Umocněním dostaneme

$$s = (10^k d_k + x)^2 = 100^k d_k^2 + 20d_k x + x^2$$

a vidíme, že hledaná cifra d_k dominantně ovlivní číslice o dva řády výše než zbytek cifer. To je očekávané. Umocněním čísla se počet jeho cifer zhruba zdvojnásobí. Při hledání počáteční aproximace a se tedy budeme soustředit zejména na první dvojici cifer čísla s . Musíme si však dát pozor, které cifry bereme. Pro jednoduchost budeme celý postup ilustrovat na příkladu.

Příklad 6. *Postup tedy bude jasný odmocňované číslo s rozdělíme na skupiny (dvojice) cifer, přičemž respektujeme polohu desetinné čárky (začneme od ní), pokud je před (případně i za) desetinnou čárkou lichý počet cifer, můžeme formálně připsat nulu. Technicky bychom mohli říct, že číslo s přepíšeme, resp. interpretujeme v číselné soustavě se základem sto, např. naše*

$$s = 28977 = [28977]_{10} = [02|89|77]_{100}.$$

Dvojice desítkových cifer totiž přímo reprezentují cifry stovkové soustavy, odmocňované číslo je tedy ve stovkové soustavě trojciferné. Lze tedy očekávat, že jeho odmocnina bude tedy trojciferná v desítkové soustavě. V první skupině cifer přitom dominuje kvadrát naší počáteční aproximace a_0^2 , jak jsme viděli.

- (i) *Spočteme celočíselný odhad odmocninu z čísla $2 = 02$, tj. $\sqrt{2} \approx 1$. Dostáváme tak*

$$a_0 = 100$$

- (ii) *Hodnotu x_0 neznáme. Chceme aby platilo*

$$s - a_0^2 = (2a_0 + x_0)x_0,$$

$$28977 - 10000 = [01|89|77]_{100} = (200 + x_0)x_0,$$

přesně spočítat to však neumíme. Můžeme se ji ale pokusit odhadnout. Odhad budeme konstruovat tak, abychom odmocninu zpřesňovali po cifách. Budeme tedy hledat $\tilde{x}_0$ ve tvaru

$$\tilde{x}_0 = 10^1 d, \quad d \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d < 9.$$

Zřejmě dostaneme

d	$\tilde{x}_0$	$(2a_0 + \tilde{x}_0)\tilde{x}_0 = (200 + \tilde{x}_0)\tilde{x}_0$
0	0	0
1	10	2100
2	20	4400
3	30	6900
4	40	9600
5	50	12500
6	60	15600
7	70	18900
8	80	22400
9	90	26100

přičemž nejlepší dolní odhad dostaneme pro $d = 7$. Tedy

$$a_1 = a_0 + \tilde{x}_0 = 100 + 70 = 170.$$

- (iii) Nyní můžeme krok (ii) fakticky zopakovat pro nový odhad. Hodnotu x_1 neznáme. Opět chceme, aby platilo

$$s - a_1^2 = (2a_1 + x_1)x_1.$$

Je dobré si uvědomit, co je na levé straně rovnice

$$s - a_1^2 = s - (a_0 + \tilde{x}_0)^2 = (s - a_0^2) - (2a_0 + x_0)x_0 = 18977 - 18900 = [77]_{100}.$$

Místo hledání řešení budeme opět hledat $\tilde{x}_1$ ve tvaru

$$\tilde{x}_1 = 10^0 d, \quad d \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d < 9.$$

Zřejmě dostaneme

d	$\tilde{x}_1$	$(2a_1 + \tilde{x}_1)\tilde{x}_1 = (340 + \tilde{x}_1)\tilde{x}_1$
0	0	0
1	1	341
2	2	684
3	3	1029
4	4	1376
5	5	1725
6	6	2076
7	7	2429
8	8	2784
9	9	3141

přičemž nejlepší dolní odhad dostaneme pro $d = 0$. Tedy

$$a_2 = a_1 + \tilde{x}_1 = 170 + 0 = 170.$$

- (iv) Pro-forma uděláme ještě jeden krok. Vidíme totiž, že v předchozím kroku nedošlo k žádnému zlepšení. To ale nevadí. Pokusíme se najít další cifru, tj. první cifru za desetinnou čárkou. Tedy dojít ke zlepšení tím, že budeme fakticky hledat desetkrát menší opravu. Opět chceme, aby platilo

$$s - a_2^2 = (2a_2 + x_2)x_2,$$

$$[77, 00]_{100} = (340 + x_2)x_2$$

a $\tilde{x}_2$ budeme hledat ve tvaru

$$\tilde{x}_2 = 10^{-1}d, \quad d \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d < 9.$$

Zřejmě dostaneme

d	$\tilde{x}_2$	$(2a_2 + \tilde{x}_2)\tilde{x}_2 = (340 + \tilde{x}_2)\tilde{x}_2$
0	0	0
1	0,1	34,01
2	0,2	68,04
3	0,3	102,09
4	0,4	136,16
5	0,5	170,25
6	0,6	204,36
7	0,7	238,49
8	0,8	272,64
9	0,9	306,81

přičemž nejlepší dolní odhad dostaneme pro $d = 2$. Tedy

$$a_3 = a_2 + \tilde{x}_2 = 170 + 0,2 = 170,2.$$

- (v) *A tak dále. Asi je zřejmé, že celý proces lze zapsat pomocí práce pouze s ciframi kompaktněji, viz tabulku 2.3.*

Tabulka 2.3: Schématický zápis algoritmu postupného výpočtu druhé odmocniny z čísla 28977 spočtené na čtyři desetinná místa.

02 89 77,00 00 00 00 -1 ²	$\sqrt{2 89 77} \doteq 170,2263$	
1 89 -1 89	$2 \cdot 1 = 2,$	$2\mathbf{7} \cdot \mathbf{7} = 189$
00 77 -0	$2 \cdot 17 = 34,$	$34\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} = 0$
77 00 -68 04	$2 \cdot 170 = 340,$	$340\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = 6804$
8 96 00 -6 80 84	$2 \cdot 1702 = 3404,$	$3404\mathbf{2} \cdot \mathbf{2} = 68084$
2 15 16 00 -2 04 26 76	$2 \cdot 17022 = 34044,$	$34044\mathbf{6} \cdot \mathbf{6} = 2042676$
10 89 24 00 -10 21 35 69	$2 \cdot 170226 = 340452,$	$340452\mathbf{3} \cdot \mathbf{3} = 10213569$
67 88 31	...	

3 Kalkulátory Nisa a jejich výroba v Proseči nad Nisou – historické poznámky

Základem průmyslového areálu na břehu řeky Nisy, na pomezí Vratislavic nad Nisou a Proseče nad Nisou, kde se v polovině 20. století kalkulátory značky Nisa vyráběly, byl průmyslový podnik s názvem Carl Wagner & Comp. zaměřený původně na textilní výrobu. Výroba kalkulátorů zde začala až po poválečné reorganizaci. Výrobní podnik je dohledatelný pod několika názvy: *Koh-I-Noor*, *Proseč nad Nisou*, *národní podnik*, pravděpodobně později *Nisa*, *národní podnik*, střídavě zřizován *Ministerstvem strojírenství*, resp. *Ministerstvem přesného strojírenství*, které bylo zřízeno v letech 1955–1958, viz [16, 17]. Nejnověji je pak podnik (resp. provoz) dohledatelný pod názvem *Zbrojovka Brno, závod Nisa*. V původním objektu dodnes probíhá průmyslová výroba, aktuálně zde sídlí firma Nisaform, s. r. o., která se k historii výroby kalkulátorů na svém webu dodnes hlásí. Z tohoto důvodu je také řada informací historicko-technického rázu v této kapitole převzato právě z webu Nisaform, s. r. o., viz [13].

3.1 Historie výroby předcházející kalkulátorům

Již zmíněná firma Carl Wagner & Comp byla kdysi významným průmyslovým podnikem. Stopa rodu Wagnerů lze vysledovat v tehdejší Maffersdorfu (dnes Vratislavicích) až do roku 1620. Předkové Franze Wagnera se živili jako tesaři a stavitelé dřevěných tkalcovských stavů, zahradníci, tkalci lnu. Firma Carla Wagnera byla oceněna na světové výstavě ve Vídni v roce 1873 a na světové výstavě v Paříži v roce 1878 získala firma bronzovou medaili. Carl Wagner byl během německo-české výstavy v Liberci v roce 1906, při příležitosti předávání bronzové medaile, představen samotnému císaři. V následujícím roce pak byl oceněn za své služby pro veřejnost řádem Rytířského kříže Franze Josefa. Zájmy podniku sahají i za hranice tehdejšího Rakousko-Uherska a sice do Itálie, Německa, Švýcarska, Ruska a Švédska. Podrobněji viz [12].

Po skončení 2. světové války byla ve firmě Carl Wagner & Comp. zavedena národní správa, firma byla vyvlastněna znárodnovacím dekretem z října 1945. V roce 1946 byl mj. na základech původní firmy založen národní podnik Továrny koberců a nábytkových látek (TOKO), viz [12]. Poznamenejme, že v této době docházelo k různým reorganizacím průmyslu a výroby, viz také nařízení vlády [16, 17].

3.2 Stručná historie výroby kalkulátorů Nisa

Možná již v době kolem druhé světové války byla v rámci podniku zahájena výroba mechanických, později elektromechanických kalkulačních strojů, následně nazývaných Nisa. V Liberci, resp. v Hanychově v předdruhoválečných letech probíhala výroba mechanického kalkulátoru Mira (někdy též česky Míra) Odhnerova typu. Dle [15], v letech 1924–1940. Zda Prosečská výroba na výrobu Hanychovskou nějak navazovala, či zda spolu byly podniky v nějaké komunikaci není jasné.

V letech 1951–1976 byly v závodě Nisa Proseč nad Nisou vyráběny mechanické kalkulační stroje Nisa. Celkem jich bylo vyrobeno přes 600 000 kusů, velká část byla vyvezena do 35 zemí, viz [13]. V ČSSR to byly v tehdejší době nejrozšířenější kalkulačky. Jejich vývoj zahájila skupina nadšenců v poválečné stagnaci bižuterního průmyslu v závodě Brditzka (nynější Soliter). Základem byl mechanický kalkulátor Monroe americké výroby. První prosečský typ Nisa M byl do značné míry jeho kopií s konstrukčními změnami souvisejícími zejména s použitím metrického systému (např. metrických závitů).

Kalkulátory byly vybaveny množstvím aritmetických a logických funkcí řešených mechanicky, později elektromechanicky. Např. kalkulátor typu Nisa PK5 obsahoval, viz [13], až 2 200 součástí převážně vlastní výroby, k výrobě se používalo více jak 3 500 nástrojů a přípravků a celkový sortiment náradí obsahoval téměř 30 000 položek. Na začátku 60. let 20. století měl závod Nisa 850 zaměstnanců, viz [13]. Poznamenejme, že některé kalkulátory měly také velmi kvalitní design (viz např. typ K2 nebo typ C). Na fotografiích na obrázku 3.1 pak vidíme historický vývoj loga kalkulátorů Nisa.

V roce 1976 výroba kalkulaček končila a závod převzal výrobu a vývoj počítačových komponent, zejména děrnopáskových zařízení ze Zbrojovky Brno. Po rozpadu trhu bývalých socialistických zemí výroba v závodě Nisa v roce 1992 zanikla. Od roku 1995 zde vzniká firma Nisaform, s. r. o., která se k historii výroby kalkulátorů hlásí alespoň prostřednictvím své webové prezentace. Předmětem výroby však je již pochopitelně jiný sortiment zboží, [13].



Obrázek 3.1: Historický vývoj loga kalkulátorů Nisa.

4 Katalog dohledaných (elektro)mechanických kalkulátorů Nisa

Srovnání tří různých technologií používaných při výrobě kalkulátorů Nisa. Vlevo používající klávesnici a tzv. Leibnitzova ozubená kola (Leibnitz wheel, stepped drum), vpravo nahoře používající tzv. Odhnerova ozubená kola (pinwheel, varianta Leibnitzova kola) a vpravo dole používající tzv. vahadlový mechanismus, viz [7, 15].



Obrázek 4.1: Srovnání tří různých technologií používaných při výrobě kalkulátorů Nisa.

4.1 Kalkulátory Odhnerova typu – Nisa typ P

Princip kalkulátoru spočívá resp. jeho základním stavebním prvem je tzv. Odhnerovo kolo, tj. ozubené kolo s proměnným počtem zubů. Tyto zuby se vysouvají a zasouvají v závislosti na nastavení vstupního registru. Kalkulátor obsahuje výsledkový registr, kde se při otočení klikou každé kolo pootočí o tolik jednotek, kolik bylo v Odhnerově kole nad ním vysunuto zubů.

Kalkulátorů Odhnerova typu se v Evropě na konci 19. a na začátku 20. století vyrábělo nepřehledné množství, viz [7, 15]. Zde je dobré upozornit, že se nám podařilo dohledat pouze jediný model kalkulátoru Nisa tohoto typu, Nisa typ P. Výroba se, zdá se, soustředila převážně na kalkulátory jiných typů. Velmi podobný mechanický kalkulátor se však vyráběl v Liberci, přesněji v Hanychově před 2. světovou válkou (doložitelně v letech 1924–1940, [15]). Jednalo se o mechanický kalkulátor Mira (někdy též česky Míra). Zda Prosečská výroba typu P na výrobu Hanychovskou nějak navazovala, zda spolu byly podniky v nějaké komunikaci, nebo zda byla výroba, nebo některé části výrobních prostředků, nástrojů, atp. přesunuty z Hanychova do Proseče, není jasné. Zbývá jen konstatovat, že se jedná o jediný model (dokonce jediný exemplář), který se nám podařilo dohledat, firmy Nisa používající systém Odhnerových kol.



Obrázek 4.2: Mechanický kalkulátor Nisa typ P.

4.2 Kalkulátory s vahadly – Nisa typ C

Mechanický kalkulátor Nisa typ C – dva exempláře pravděpodobně jediného modelu (dle našich znalostí) firmy Nisa používající systém vahadel. Systém uvnitř opět používá pouze jednoduchých ozubených kol, k jejíž pootáčení je použito pouze primitivního mechanismu vahadel, kterými je na kola přenášen přímo pohyb kláves. Už na první pohled upoutá, že kalkulátor má klávesy pouze od jedné do pěti. Pro zadání větší číslice bylo tedy třeba zmáčknout postupně více kláves. Na rozdíl od ostatních kalkulátorů, které působí robustně a spíše jako skutečné výpočetní nástroje, typ C se zdá být spíše kancelářskou kalkulačkou pro občasné jednoduché výpočty.



Obrázek 4.3: Mechanický kalkulátor Nisa typ C.

4.3 Kalkulátory s klávesnicí a Leibnitzova kola – Nisa typ M a typové řady K a PK

Na první pohled vidíme rozdíl mezi těmito kalkulátory a předchozími dvěma typy kalkulátorů. Tyto kalkulátory mají klávesnici a jejich předobrazem je právě kalkulátor Monroe. Kalkulátor funguje na principu Leibnitzova válce s proměnným počtem ozubených kol, viz [8]. Válec je trochu podobný válci s Odhnerovými koly, je však mnohem menší, zakomponovaný v zadní části přístroje. Zadávání čísel již neprobíhá pomocí stavítek na válci ale pomocí klávesnice, která přístroji vizuálně dominuje. Starší modely byly plně mechanické, novější elektromechanické (na fotografii 4.4 kalkulatory nahoře uprostřed a vpravo dole).



Obrázek 4.4: Srovnání mechanických kalkulatorů Nisa typ M, K, a PK.

4.3.1 Nisa typ M

Na obrázku 4.5 je porovnání tří exemplářů kalkulátorů typu M. Za povšimnutí stojí dvě různá barevná provedení – a to jak klávesnice (bílo-zelená vs. žluto-bílá) tak svrchních částí zakrytování přístroje (šedá vs. tmavozelená).



Obrázek 4.5: Srovnání tří exemplářů kalkulátorů typu M.



Obrázek 4.6: Mechanický kalkulátor Nisa typ M.

4.3.2 Nisa typ K

Historicky po typu M pravděpodobně následoval typ K, který je svému předchůdci designově velmi podobný, viz obrázky 4.6 a 4.7.



Obrázek 4.7: Mechanický kalkulátor Nisa typ K.

4.3.3 Nisa typ K1 a PK1 (pravděpodobně starší varianta)

Na obrázku 4.8 vpravo je plně mechanický kalkulátor K1, vlevo elektromechanický PK1. Poznamenejme, že v případě těchto dvou konkrétních modelů, jsme se také setkali s označením EK a EK1. Jaké označení je správné, nebo zda se označení v průběhu času měnilo, zatím není zcela jasné. Podle celkového vzhledu kalkulátoru a designu loga se zdá být pravděpodobné, že tento model navazoval na model K.



Obrázek 4.8: Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K1 a PK1.



Obrázek 4.9: Mechanický kalkulátor Nisa typ K1 a PK1.

4.3.4 Nisa typ K1 a PK1 (pravděpodobně novější varianta)

Pod označením K1 a PK1 nalézáme také mechanické, resp. elektromechanické kalkulátory jiného designu (a s modernějšími logy), viz obrázky 4.10 a 4.11.



Obrázek 4.10: Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K1, resp. PK1, (pravděpodobně) novější varianty tohoto modelu.



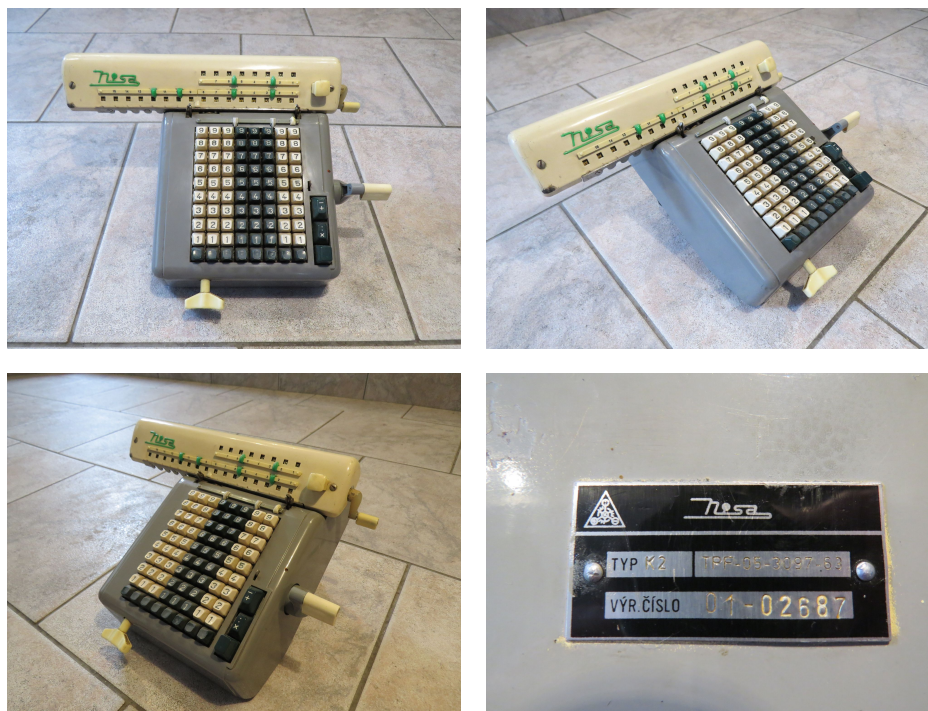
Obrázek 4.11: Mechanický kalkulátor Nisa typ K1 a PK1, (pravděpodobně) novější varianta.

4.3.5 Nisa typ K2

Kalkulátory se později dodávaly v elegantním koženém kufříku v mnoha barvách.



Obrázek 4.12: Srovnání tří exemplářů kalkulačků modelu K2.



Obrázek 4.13: Mechanický kalkulačtor Nisa typ K2.

4.3.6 Nisa typ K5 a PK5

Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K5, resp. PK5. Poznamenejme, že exempláře vlevo a uprostřed mají svrchní kryty vyrobeny z plastu, zatímco exemplář zcela vpravo má svrchní kryty kovové.



Obrázek 4.14: Srovnání mechanických kalkulátorů Nisa typ K5, resp. PK5.



Obrázek 4.15: Mechanický kalkulátor Nisa typ K5 a PK5.

Závěr

Na základě zadání a cíle této bakalářské práce jsme představili v první části různé metody výpočtu druhé odmocniny přirozeného čísla. Představili jsme zřejmě nejstarší algoritmus výpočtu druhé odmocniny tzv. babylonskou metodu. Dále jsme řešili výpočet druhé odmocniny pomocí Newtonovy metody tečen, Taylorovou metodou a Bakhshaliho metodou. Došli jsme k několika zajímavým závěrům: Prvním z nich je souvislost babylonské metody s metodou Newtonovou a Taylorovou použitou na výpočet odmocniny. Druhým je obecná hlubší souvislost mezi Newtonovou a Taylorovou metodou. Třetím pak, že jeden krok Bakhshaliho metody odpovídá přesně dvěma krokům babylonské metody. Další metodou, kterou jsme se zabývali, byla metoda řetězových zlomků a algoritmem postupného výpočtu druhé odmocniny. Tento algoritmus se vyučoval na školách ještě ve 20. století a v principu je asi nejlépe použitelný právě v kontextu mechanických kalkulátorů. Teoretická odvození jednotlivých metod jsme ilustrovali také prakticky částí. Na stejný příklad výpočtu druhé odmocniny konkrétního čísla jsme aplikovali všechny metody uvedené v této práci. Porovnávali jsme, které metody jsou rychlejší, tedy kdy výsledek získáváme po méně krocích. O výpočetní náročnost jsme se přitom nestarali.

Ve druhé části této práce jsme shrnuli historický vývoj mechanických kalkulátorů Nisa. Představili jsme tři různé technologie používané při výrobě kalkulátorů Nisa. Tj. používající klávesnici a tzv. Leibnitzova ozubená kola (Leibnitz wheel, stepped drum), dále Odhnerova ozubená kola (pinwheel, varianta Leibnitzova kola) a tzv. vahadlový mechanismus. Některé stroje byly plně mechanické, na kliku a s postupnými drobnými či většími inovacemi zůstaly v používání až do 70. let dvacátého století. Novější modely byly již elektromechanické. V sedmdesátých letech byly mechanické stroje vytlačeny levnými elektronickými kalkulačkami. Rychlost s jakou mechanické kalkulátory upadly v zapomnění vskutku neuvěřitelná, ze dne na den se staly mechanické kalkulátory nepotřebnými. Přesto na svou dobu jsou považovány za pokrokový zázrak.

Literatura

- [1] D. Fowler, E. Robson: *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica, 1998.
- [2] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman: *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2005.
- [3] T. Hayashi: *Bakhshali rukopis: starověký indický matematická pojednání*, Groningen orientálních studií. Groningen: Egbert Forsten, 1995. ISBN 978-90-6980-087-5.
- [4] V. Honzlová Exnerová: *Výpočet odmocnin od starověku po současnost*, Univerzita Karlova v Praze, 2004.
- [5] A. J. Chinčín: *Řetězové zlomky*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.
<https://dml.cz/data/handle/10338.dmlcz/402842/monography.pdf>
- [6] M. Krbálek: *Matematická analýza III.*, Nakladatelství ČVUT, Praha 2008, 2. vydání.
- [7] E. Martin: *The Calculating Machines (Die Rechenmaschinen), Their History and Development* (transl. P. A. Kidwell, M. R. Williams), Volume 16 in the Charles Babbage Institute Reprint Series for the History of Computing, The MIT Press, Cambridge MA and London, and Tomash Publishers, Los Angeles and San Francisco, 1992.
- [8] R. Mařík, *Mechanická matematika*, dostupné online.
<http://user.mendelu.cz/marik/mechmat>
- [9] K. Rektorys a kol.: *Přehled užití matematiky I.*, Prometheus, Praha, 2003, 7. vydání. ISBN 80-7196-179-5
- [10] J. Tkadlec: *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*, Nakladatelství ČVUT, Praha 2004, 1. vydání. ISBN 80-01-03039-3.
- [11] P. Vít: *Řetězové zlomky*, Vydal ÚV Matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta, 1982.
- [12] Libea, s. r. o., *Wagnerové ve stínu i šlépějích Ginzkeyů*, dostupné online.
<https://www.libea.cz/wagnerove-ve-stinu-i-slepejich-ginzkeyu>

- [13] Nisaform, s. r. o., *Historie společnosti*, dostupné online.
<https://www.nisaform.cz/historie-spolecnosti>
- [14] *Nisa PK5*, manuál ke kalkulátoru, Proseč nad Nisou.
- [15] *Rechenmaschinen Illustrated*, dostupné online.
<http://www.rechenmaschinen-illustrated.com>
- [16] *Nařízení vlády č. 48/1955 Sb. Vládní nařízení o zřízení ministerstva těžkého strojírenství, ministerstva přesného strojírenství, ministerstva automobilového průmyslu a zemědělských strojů a ministerstva státních statků*, dostupné online.
<https://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=48&r=1955>
<https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1955-48>
- [17] *Nařízení vlády č. 60/1958 Sb. Vládní nařízení o sloučení ministerstva automobilového průmyslu a zemědělských strojů a ministerstva přesného strojírenství v ministerstvo všeobecného strojírenství*, dostupné online.
<https://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=60&r=1958>
<https://www.zakonyprolidi.cz/cs/1958-60>