TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Problém vlastních čísel a jeho různá zobecnění

Bakalářská práce

P18000280

Studijní program: B1101 – Matematika
Studijní obory: 1802R023 – Informatika se zaměřením na vzdělávání
7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Jiří Šikola**
Vedoucí práce: Martin Plešinger

Liberec 2019/20

Tento list nahraďte
originálem zadání.

Prohlášení

Byl jsem seznámen s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že texty tištěné verze práce a elektronické verze práce vložené do IS STAG se shodují.

30. 4. 2020 Jiří Šikola

Anotace

Cílem práce zpracovat základní poznatky týkající se úlohy vlastních čísel (čtvercových) matic, zejména věty o spektrálním, Schurově, resp. Jordanově rozkladu, a zavést základní pojmy jako je charakteristický polynom, průvodní matice polynomu, algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla.
V druhé části práce pak provedeme stručnou rešerši v matematické praxi nejčastěji se vyskytujících zobecnění úlohy vlastních čísel jako jsou např. klasický *zobecněný problém* vlastních čísel, *kvadratický problém vlastních čísel*, ale také na obecný *polynomiální problém vlastních čísel*. V případech, kde to bude možné bude naznačeno, jak k řešení zobecněné úlohy po teoretické stránce přistoupit (cílem práce není studium algoritmů pro řešení takových úloh).

Klíčová slova:

vlastní číslo; vlastní vektor; Schurův rozklad; Jordanův rozklad; Spektrální rozklad; problém vlastních čísel; zobecněný problém vlastních čísel; kvadratický problém vlastních čísel; polynomiální problém vlastních čísel

Abstract

The goal of this thesis is to collect basic knoweledge about the standard eigevalue problem for (square) matrices. In particular to recapitulate the theorems about spectral, Schur's and Jordan's decompositions while introducing the basic related objects like the characteristic polynomial, companion matrix of a polynomial, algebraic and geometric multiplicity of an eigenvalue.
In the other part of theis thesis, we explore a few generalizations of the eigenvalue problem that are often studied in mathmatics. We focus on the classical *generalized eigenvalue problem*, the *quadratic eigenvalue problem*, and also on the general *polynomial eigenvalue problem*. We also briefly suggest, how to solve such generalized problems, but only from the theoretical point of view (we do not study practical real-world algoritms for solving such tasks).

Key words:

eigenvalue; eigenvector; Schur's decomposition; Jordan's decomposition; spectral decomposition; eigenvalue problem; generalized eigenvalue problem; quadratic eigenvalue problem; polynomial eigenvalue problem

Poděkování

V první řadě bych rád poděkoval svému vedoucímu práce Martinovi Plešingerovi za odborné vedení, cenné rady a čas, který věnoval při tvorbě této práce. Dále bych poděkoval všem ostatním, kteří mě podporují při studiu.

Obsah

Seznam vět

Značení

$\mathbb{C}, \mathbb{R}$	množina komplexních čísel, množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel tj. $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel včetně 0
$\lambda \in \mathbb{C}$	komplexní číslo λ
$\overline{\alpha}_{j,i}$	komplexně združené číslo ke komplexnímu číslu α.
$x \in \mathbb{C}^n$	n prvkový sloupcový vektor x s komplexními koeficienty
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$	komplexní matice s m řádky a n sloupci.
$(A)_{i,j}$	prvek matice A v i-tém řádku a j-tém sloupci.
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$	komplexní čtvercová matice řádu n
A^T	transpozice matice A
A^*	hermitovsky sdružená matice A
x^T	transponovaný vektor ve smyslu transpozice matice
x^*	hermitovsky sdružený vektor ve smyslu hermitovsky sdružené matice
$0 \in \mathbb{C}^n$	nulový vektor řádu n
$0 \in \mathbb{C}^{m \times n}$	nulová matice s m řádky a n sloupci
$\operatorname{diag}(\delta_{1,1}, \dots, \delta_{n,n})$	diagonální matice s prvky $\delta_{1,1}, \dots, \delta_{n,n}$ na hlavní diagonále
I_n	jednotková matice řádu n
0_n	nulová matice řádu n
$\chi_A(\lambda)$	charakteristický polynom matice A
$\chi_{(A,B)}(\lambda)$	charakteristický polynom páru matic (A, B)
$\operatorname{sp}(A)$	spektrum matice A
$\operatorname{sp}(A, B)$	spektrum páru matic (A, B)
$\operatorname{Ker}(A)$	jádro matice A
$\det(A),\ \lvert A\rvert$	determinant matice A
A^{-1}	inverzní matice k regulární matici A
$M \subseteq N$	M je podmnožinou N
$M \subset N$	M je vlastní podmnožinou N
$[v_1, \dots, v_n]$	lineárně nezávislá posloupnost vlastních vektorů $v_1, \dots, v_n$

Terminologie problémů vlastních čísel

$Ax = \lambda x$	klasický problém vlastních čísel (EP)
$x = \lambda Bx$	obrácený problém vlastních čísel
$Ax = \lambda Bx$	zobecněný problém vlastních čísel (GEP)
$(\lambda^2 I_n + \lambda B + A)x = 0$	kvadratický problém vlastních čísel (QEP)
$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0$	zobecněný kvadratický problém vlastních čísel (GQEP)
$(\lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \cdots + A_0)x = 0$	polynomiální problém vlastních čísel (PEP)
$(\lambda^k A_k + \lambda^{k-1} A_{k-1} \cdots + A_0)x = 0$	zobecněný polynomiální problém vlastních čísel (GPEP)

Úvod

Vlastní čísla jsou pojem se kterým se student matamatiky, učitelského či neučitelského studia, nejčastěji seznámí, již v prvním roce svého studia v předmětu Lineární algebra, který je úvodem do problému matic a vektorových prostorů. Základní myšlenkou při výpočtu vlastních čísel je převést maticový problém na problém polynomiální.

Ve své bakalářské práci bych rád přinesl náhled do různých zobecnění problému vlastních čísel. V rámci terminologie se budeme bavit o třech typech problému a to o klasickém problému vlastních čísel (Eigenvalue problem), zobecněném problému vlastních čísel (Generalized eigenvalue problem) a polynomiálním problému vlastnch čísel (Polynomial eigenvalue problem). Každý z těchto problémů zavadí pojem vlastní číslo a vlastní vektor trochu jiným způsobem. Zobecněný a polynomiální problém vlastních čísel rozšiřují klasický problém různě, avšak se vzájemně doplňují. Tím nám vzniká nejasnost, pokud bude potřeba v následujícím textu mezi těmito problémy odlišovat.

O klasickém problému vlastních čísel lze nalézt informace v téměř každé učebnici lineární algebry. V této práci jsme se inspirovali zejména díly [14] nebo [1]. O zobecněném problému vlastních čísel, jeho řešení s různými typy matic včetně vlastních vektorů a některých možných maticových úprav, lze nalézt v [12]. O kvadratickém problému, jeho speciálních případech a jeho využití v mechanice či při výpočtech fyzikálních veličin v elektrických obvodech se lze dočíst například v literatuře [13] a o polynomiálním problému v [9], [2]. O možnostech linearizace polynomiální problému lze použít zdroj [8].

Úkolem tohoto textu bude čtenáře seznámit s různými zobecněními problému vlastních čísel a jejich řešení, převedením na klasický problém vlastních čísel. Dále je dobré poznamenat, že problém vlastních čísel se váže k problému, nalézt exaktní hodnotu polynomu stupně většího než 4. Z toho plyne, že většina literatury zabývající se problematikou vlastních čísel popisuje algoritmy, kterými lze hledat numerická řesení vlastních čísel.

V práci bude často přecházeno mezi názvy probléme vlastních čísel a úloha vlastních čísel. Tyto dva názvy budeme ztotožňovat.

Matice se zpravidla definují nad obecnými tělesy. V této práci budeme velmi často pracovat s komplexními čtvercovými maticemi a jen výjmečně s reálnými. Od čtenáře se předpokládá, že tedy zná některé vlastnosti těchto těles. Čtvercové matice nad jinými tělesy než $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ nejsou součástí této práce.

Klasický problém vlastních čísel je silně spjat se čtvercovými maticemi. K jejich definici totiž čtvrercovou matici je nutné předpokládat. Z toho důvodu se matice, které nebudou čtvercové, v této práci objeví jen ve výjmečných případech.

Práce je rozvržena do čtyř kapitol. V kapitole 1 si stručně popíšeme základní pojmy s lineární a obecné algebry, které využijeme v dalších kapitolách. V kapitole 2 si definujeme vlastní čísla a vektory pro klasický problém vlastních čísel a zaměříme se zejména na vlastnosti průvodní matice, spektrum a několika rozkladům matic pomocí vlastních čísel.

V kapitole 3 si zobecníme klasický problém a uvedeme několik případů, které se dají jednoduchými úpravami převézt na klasiký problém vlastních čísel. V kapitole 4 si ukážeme převod kvadratického problému vlastních čísel na klasický pomocí znalostí o průvodních maticích klasického problému a tento krok završíme v kapitole 5 převodem obecného polynomiálního problému vlastních čísel na problém klasický.

1 Základní pojmy

V první kapitole si stručně připomeneme několik základních pojmů a nástrojů z lineární a obecné algebry, bez kterých se v následujícím textu neobejdeme. Kapitola je rozdělena na tři sekce – Matice a vektory (sekce 1.1), Skalární součin a ortogonalita (sekce 1.2) a Polynomy (sekce 1.3). Nejprve se zaměříme na matice, čtvercové matice, různé typy čtvercových matic, vektor a na pojem blokové matice. Následně přejdeme k pojmu determinant a uvedeme si několik jeho vlastností. Definujeme si regulární a singulární matice a charakterizujeme si je. Ve třetí sekci se zaměříme na unitární matice a jejich vlastnosti, které souvisí se skalárním součiem. V poslední sekci si vybereme některé znalosti o polynomech v souvislostech se Základní větou algebry a Abelovou–Galoisovou větou. Podrobnější výklad lineární a obecné algebry lze nalézt v knihách od Kořínka [7] a obecné algebry od Stanovského [11] nebo velmi ucelená skripta lineární algebry od Bárta a Tůmy [14].

1.1 Matice a vektory

V první řadě je potřeba si definovat pojem matice nad komplexními a reálnými čísly.

Definice (Matice)**.** *Reálnou resp. komplexní maticí s m-řádky a n-sloupci rozumíme uspořádanou množinu seřazenou do tabulky*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

takovou, že $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$, (resp. $\mathbb{C}$). Symbolem $(A)_{i,j}$ rozumíme prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A tj.

$$(A)_{i,j} = \alpha_{i,j}.$$

V následujím textu budeme výhradně pracovat se čtvercovými maticemi nad komplexními čísly, nad kterými jsou definovány klíčové pojmy této práce. Čtvercových matic existuje velké množství typů a každá z nich je nějakým způsobem svázána s vlastními čísly. Zavedeme si tedy čtvercovou matici a několik jejích různých variant následujícím způsobem.

Definice (Typy matic)**.** *Čtvercovou maticí řádu n rozumíme matici s n řádky a n sloupci. Horní (resp. dolní) trojúhelníkovou maticí U (resp. L) rozumíme čtvercovou matici takovou, že*

$$(U)_{i,j} = 0\ ,\ i < j \qquad (L)_{i,j} = 0\ ,\ i > j.$$

Řekneme, že D je diagonální matice řádu n, pokud je horní a zároveň dolní trojúhelníková. Diagonální matici značíme

$$D = \operatorname{diag}(\delta_{1,1}, \ldots, \delta_{n,n}).$$

Nechť A je komplexní matice s m řádky a n sloupci, pak transponovanou maticí A^T a Hermitovsky sdruženou maticí A^* rozumíme takové matice, že

$$(A^T)_{i,j} = a_{j,i}, \qquad (A^*)_{i,j} = \overline{\alpha}_{j,i}.$$

Symetrickou maticí S a hermitovskou maticí H rozumíme matice

$$S^T = S \qquad H^* = H.$$

Předchozí definice je z velké části přejata z literatury [5, str. 1–2]. Definice těchto typů lze jistě nalézt v libovolné učebnici lineární algebry. Symbolem $\overline{\alpha}_{j,i}$ v definici hermitovsky sdružené matice rozumíme číslo komplexně sdružené k číslu $\alpha \in \mathbb{C}$. Symetrickou maticí zpravidla rozumíme reálnou symetrickou matici. Pokud budeme hovořit o komplexní symetrické matici, bude to v daný moment zmíněno. Povšimněte si, že v případě reálné matice A jsou transponovaná matice A^T a komplexně sdružená matice A^* tytéž tj.

$$A^T = A^*,\ A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Odtud plyne, že i pojmy symetrická matice a hermitovská sdružená matice v případě reálných matic splývají. Dalším významným druhem čtvrecových matic jsou matice, které reprezentují jednotkový a nulový prvek.

Definice (Jednotková a nulová matice)**.** *Jednotkovou maticí I_n řádu n a nulovou maticí 0_n řádu n budeme rozumět komplexní diagonální matice řádu n takové, že*

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) \qquad 0_n = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0).$$

Nulovou matici s m rádky a n sloupci budeme značit $0_{m,n}$. V rámci následujících definic budeme jednotkovou a nulovou matici psát bez indexu, pokud bude z kontextu zřejmé jak jsou velké.

V literatuře [14, str. 153] se vektor definuje jako prvek vektorového prostoru. Pro naše potřeby, ve kterých si definici vektorového prostoru nepotřebujeme zavádět, si vektor ztotožníme s maticí, která má jeden sloupec. Vektor budeme značit $v \in \mathbb{C}^n$. Někdy se též vektoru říká sloucový vektor, abychom jej odlišili od vektoru řádkového, tj. vektoru reprezentovaného jedním řádkem komplexní matice. Řádkový vektor budeme značit $v^T \in \mathbb{C}^m$ a bude vždy explicitně zmíněn. V některých případech může vektor obsahovat pouze reálné prvky, pak takový vektor budeme značit $v \in \mathbb{R}^n$. Nyní si uvedeme matici reprezentující inverzní prvek a pojem regulární matice.

Definice (Inverzní, regulární, singulární matice). *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, Inverzní maticí k matici A rozumíme komplexní čtvercovou matici A^{-1} řádu n takovou že*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, řekneme že A je regulární právě tehdy, když pro každý nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ platí

$$Ax \neq 0.$$

Matici A nazveme singulární, pokud není regulární.

Je dobré poznamenat, že každá matice je regulární právě tehdy, když k ní existuje inverzní matice. Navíc součin regulárních matic je regulární matice. Charakterizujme si singulární matice, které budeme využívat v následujících kapitolách. Přechod k charakterizaci regulárních matic postačí negace výroků následující věty. Věta je rešerší negace věty 4.65 z [14, str. 132] a negací tvrzení 7.22 z [14, str. 256].

Věta 1.1 (Charakterizace singulárních matic). *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak jsou následující výroky ekvivalentní.*

(i) A je singulární.

(ii) Existuje $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ takové, že $Ax = 0$.

(iii) Exituje b takové, že lineární soustava rovnic $Ax = b$ má alespoň dvě řešení.

Důkaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Plyne přímo z definice singulární matice.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nechť existuje y takové, že $Ay = 0$, pak pro každé $\alpha \neq 0$ platí $\alpha Ay = \alpha 0 = 0$. Zvolme si libovolný vektor $\hat{b} \in \mathbb{C}^n, A\hat{b} \neq 0$, pak

$$\begin{aligned} Ay = 0 \quad &\wedge \quad \alpha Ay = 0 \\ Ay + A\hat{b} = A\hat{b} \quad &\wedge \quad \alpha Ay + A\hat{b} = A\hat{b} \\ A(y + \hat{b}) = A\hat{b} \quad &\wedge \quad A(\alpha y + \hat{b}) = A\hat{b}. \end{aligned}$$

Označme $b = A\hat{b}$ a $x_1 = y + \hat{b}$, $x_2 = \alpha y + \hat{b}$. Odtud plyne tvrzení.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Nechť existují dvě řešení $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n, x_1 \neq x_2$ soustavy rovnic $Ax = b$, pak

$$A(x_2 - x_1) = Ax_2 - Ax_1 = b - b = 0.$$

□

Nyní se odprostíme od singulárních matic a zaměříme se na maticové prvky. Matice mohou mít různé druhy prvků jako jsou například komplexní nebo reálná čísla. Nicméně prvek matice může být tvořen i jinou maticí. Proto si nyní zavedeme pojem blokové matice.

Definice (Bloková matice a maticový blok). *Nechť A je komplení matice s m řádky a n sloupci. Blokovým dělením matice A rozumíme*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,l} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \dots & A_{k,l} \end{pmatrix} \quad k \leq m\,,\ l \leq n$$

takovou, že $A_{i,j}$ je komplexní matice a navíc platí:

(a) Matice A_{i,j_1} a $A_{i,j_2}, j_1, j_2 \in \{1, \dots, l\}$ mají stejný počet řádků pro dané i.

(b) Matice $A_{i_1,j}$ a $A_{i_2,j}, i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$ mají stejný počet sloupců pro dané j.

Blokovou maticí poté nazveme matici A a maticový blok matici $A_{i,j}$. Blokově diagonální maticí rozumíme blokovou matici D takovou, že blokovým dělením je maticový blok

$$D_{i,j} = 0\ ,\ i \neq j,\ 0 \in \mathbb{C}^{m_i,n_j}.$$

Definice pochází z literatury [5, str. 5]. Struktura blokové matice se nám bude hodit v některých důkazech vět. Příkladem je důkaz Schurovy věty (věta 2.13).

Pojem vlastní čísla se neobejdou bez determinantu čtvercové matice. Determinant totiž tvoří pomyslný pilíř mezi maticí a vlastními čísly.

Definice (Determinant). *Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{C}$. Determinantem matice A rozumíme komplexní číslo* $\det(A)$ *takové, že*

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(i),i},$$

kde S_n je množina všech permutací prvků $1, \dots, n$.

O permutacích a množině S_n se lze více dočíst v [14, str. 244–250]. Determinant matice A lze značit jako $|A|$. V této práci budeme používat oba způsoby značení ($\det(A)$ i $|A|$) podle toho, co v danou chvíli bude vhodnější. Charakterizovat singulární matici, lze i pomocí determinatu. Komplexní čtvercová matice A řádu n je singulární, právě tehdy když

$$\det(A) = 0.$$

Toto tvrzení lze nalézt jako negaci tvrzení 7.22 v literatuře [14, str. 256]. V předchozí větě jsme si ukázali, jakým způsobem lze charakterizovat singulární matice a že jich může být velké množství. Nyní si uvedeme některé základní způsoby, které lze použít při výpočtu determinantů.

Věta 1.2 (Aritmetika determinantu). *Nechť A, B jsou komplexní čvercové matice řádu n, pak* *(i)* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$,

(iii) $\det(A) = \overline{\det(A^*)}$,

(iv) $\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

Důkaz věty lze nalézt v literatuře [14, str. 252, str. 257] Nyní si povíme něco o rozvoji determinantu, který lze využít pro vyjádření determinantu, pomocí souboru determinantů o řád nižší matice. Nástroje jsou převzaty z literatury [5, str. 4] a [14, str. 259]. Důkazy věty 1.3 a věty lze nalézt v [14, str.259–260]. K výpočtu determinantu lze používat tkzv. rozvoj determinantu podle sloupce nebo řádku. Definujme si proto nejprve algebraický doplněk, abychom mohli tvrzení o tkzv. rozvoji determinantu vyslovit.

Definice (Algebraický doplněk)**.** *Nechť A je koplexní čtvercová matice řádu n, $n \geq 2$, pak algebraickým doplňkem prvku $a_{i,j}$ rozumíme výraz*

$$(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$

kde $A_{i,j}$ je komplexní čtvercová matice řádu $n-1$, jenž vznikne vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce u matice A.

A poté lze již zformulovat tvrzení věty.

Věta 1.3 (O rozvoji determinantu)**.** *Nechť A je koplexní čtvercová matice řádu n, $n \geq 2$.*

(i) Nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$, pak říkáme, že rozvíjíme podle i-tého řádku a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

(ii) Nechť $j \in \{1, \ldots, n\}$, pak říkáme, že rozvíjíme podle j-tého sloupce a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Uveďme ještě jednu vlastnost determinatu, která se váže k horní trojúhelníkové matici a jejichž důkaz lze nalézt v literatuře [14, str. 251].

Věta 1.4 (O determinantu horní trojúhelníkové matice)**.** *Nechť U je horní trojúhelníková matice, pak*

$$\det(U) = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i}.$$

Je-li A je čtvercová bloková matice tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix},$$

kde B, D jsou čtvercové matice, pak

$$\det(A) = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}).$$

Pokud je matice D dolní trojúhelníková, věta platí ve stejném znění. Navíc platí i jeji bloková varianta.

1.2 Skalární součin a ortogonalita

Pro podsekci zabývající se Shurovým rozkladem je potřeba si definovat pojem unitární matice a popsat vztahy mezi unitární maticí a skalárním součinem a normou vektoru. Tyto vztahy se nám budou hodit k důkazu Shurovy věty. Začneme definicí unitární matice, o které se můžeme více dozvědět viz [14, str. 311].

Definice (Unitární matice)**.** *Komplexní čtvercovou matici U nazveme unitární pokud $UU^* = I_n$.*

Obdobně jako singulární a regulární matice i unitární matice jsou uzavřené vzhledem k operaci násobení.

Věta 1.5 (O součinu unitární matice)**.** *Součin dvou unitárních matic je unitární matice.*

Důkaz. Nechť A, B jsou unitární matice, pak

$$(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*B = I_n.$$

Odtud plyne tvrzení. □

Nyní pro popis vztahů mezi unitární maticí a skalárním součinem je potřeba definovat si skalární součin, jenž přejímáme z literatury [14, str. 278] a [1, str. 367].

Definice (Skalární součin, Kolmost vektorů)**.** *Řekneme, že zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{C}$) je skalární součin na $\mathbb{C}^n$, pokud $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$ takové,že $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n)$ platí*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Vektory $u, v \in \mathbb{C}^n$ nazveme vzájemně kolmé, pokud

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Se skalárním součinem je svázán pojem normy, zpravidla se dokazuje vět, že skalární součin tzv. indukuje normu, viz [5]. My zde pro jednoduchost zavedeme normu právě tímto vztahem, kterým je definována například v literatuře [1, str. 363].

Definice (Norma vektoru, Jednotkov vektor). *Normou vektoru $v \in \mathbb{C}^n$ rozumíme výraz*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Řekneme, že vektor $v \in \mathbb{C}^n$ je jednotkový pokud

$$\|v\| = 1.$$

Unitární matice má zajímavou vlastnost, kterou použijeme při důkazu Shurova rozkladu (věta 2.13) a která souvisí s kolmostí dvou vektorů a jednotkovými vektory. Mějme unitární matici řádu n, rozdělenou na sloupcové vektory tj. $Q = (v_1, \ldots, v_n)$, pak platí dva následující výroky.

(i) Vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou jednotkové tj. $\forall i \in \{1, ..., n\} \ : \ \langle v_i, v_i\rangle = 1$.

(ii) Dva vzájemně různé sloupcové vektory jsou navzájem kolmé tj. $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, i \neq j \ : \ \langle v_i, v_j\rangle = 0$.

Tyto vlastnosti plynou z násobení matic a vztahu $U^*U = I_n$. Máme-li jednotkový vektor $q_1 \in \mathbb{C}^n$, pak jsem schopni nalézt jednotkové vektory $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{C}^n$ tak, aby $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ byla unitární matice například, převodem lineárně nezávislé posloupnosti $(q_1, v_2, \ldots, v_n)$, kde $v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ pomocí Gramovy–Schmidtovy ortogonalizace o které se lze dočíst například v literatuře [5, str. 66-70]. Tímto bychom měli mít dostatečný aparát ohledně unitární matic, abychom v sekci 2 mohli dokázat Schurovu větu (věta 2.13. Poslední sekcí, kterou je nezbytnou v problematice vlastních čísel a tím jsou polynomy.

1.3 Polynomy

Nyní se přesuneme k definicím a tvrzením, které potřebujeme z obecné algebry a to konkrétně připomenutím pojmu polynom o kterém se lze více dočíst v [11, str. 27].

Definice (Polynom). *Polynomem $\pi(\xi)$ stupně n rozumíme výraz*

$$\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k \ , \ \alpha_n \neq 0.$$

Symbolem α_k zapisujeme k-tý koeficient polynomu a ξ nazýváme proměnnou polynomu Koeficient α_0 nazýváme absolutní koeficient. Kořenem polynomu rozumíme ξ_0 takové, že $\pi(\xi_0) = 0$.

Polynomy mohou mít obecně různé koeficienty a různé typy proměnné. Komplexním polynomem s komplexními koeficienty rozumíme zobrazení $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ takové, že

$$\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k,\ \alpha_k, \xi \in \mathbb{C},\ \alpha_n \neq 0.$$

Takový polynom využijeme v případě výpočtu klasických a zobecněných vlastních čísel a vektorů. Speciálním případem komplexního polynomu může, být komplexní polynom s reálnými koeficienty, který rozumíme zobrazení $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ takové, že

$$\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k,\ \alpha_k \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{C},\ \alpha_n \neq 0.$$

nebo reálný polynom s reálnými koeficienty, kterým rozumíme zobrazení $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k,\ \alpha_k, \xi \in \mathbb{R},\ \alpha_n \neq 0.$$

Polynomem s maticovými koeficienty stupně n rozumíme zobrazení takový, že

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} A_k X^k,\ A_k \in \mathbb{C}^{m\times m}, \det(A_n) \neq 0_n,$$

kde A_k je k-tý koeficient polynomu a $X \in \mathbb{C}^{m\times m}$ je proměnná. Mluvíme-li o polynomu s maticovými koeficienty komplexní proměnné stupně n, který budeme využívat v případě polynomiálního problému vlastních čísel, budeme tím rozumět polynom $M(\xi)$ takový, že

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} A_k \xi^k,\ A_k \in \mathbb{C}^{m\times m}, \det(A_n) \neq 0_n,$$

přičemž A_k je k-tý koeficient polynomu a $\xi \in \mathbb{C}$ je proměnná. Definice polynomu s maticovými koeficienty není zcela korektní. Správně bychom měli psát polynomu s komplexními čtvercovými maticovými koeficienty. Jelikož se v této práci budeme zabývat zejména komplexními čtvercovými maticemi, budeme polynomem s maticovými koeficienty vždy rozumět polynom s koeficienty, které jsou komplexní čtvercové matice stejného řádu.

Definice (Monický polynom)**.** *Polynomem $\pi(\lambda)$ stupně n nazveme monický, pokud $\alpha_n = 1$.*

Pro polynom s komplexními koeficienty rozumíme polynom tvaru

$$\xi^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \xi^k,\ \alpha_k, \xi \in \mathbb{C}.$$

V případě polynomu stupně n s maticovými koeficienty řádu m, požadujeme podmínku aby

$$A_n = I_m,$$

tedy polynom tvaru

$$X^n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k X^k,\ A_k, X \in \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Obdobně u polynomu stupně n s maticovými koeficienty řádu m požadujeme stejnou podmínku $A_n = I_m$. Máme-li polynom $\pi(\xi)$ s libovolným druhem koeficientů, pak lze polynom převést na monický, aniž by se změnila množina jeho kořenů. Uvedeme převedení polynomu na polynom monický v případě námi uvedených tří případů.

(a) Obě strany polynomiální rovnice tvořenou polynomem s komplexními koeficienty $\pi(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi^k = 0$, $\alpha_n \neq 0$ vydělíme neulovým číslem α_n.

(b) Obě strany polynomiální rovnice tvořenou polynomem s maticovými koeficient(komplexní i maticové proměnné) vynásobíme maticí A_n^{-1} zleva, což lze neboť předpokládáme regularitu matice A.

Dalším velmi užitečným nástrojem je Základní věta algebry, jejiž tvrzení odpovídá na otázku existence kořenů polynomu s komplexními koeficienty a její důsledek hovoří o počtu kořenů. Důkaz Základní věty algebry a její důsledek je obtížnější a lze jej nalézt například v literatuře [7, str. 354–361].

Věta 1.6 (Základní věta algebry)**.** *Pro každý komplexní polynom $\pi(\lambda)$ stupně větší než 1 existuje prvek $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ takový, že $\pi(\lambda_0) = 0$.*

Následně si uvědme důsledek, který nalezneme například v [14, str. 19].

Důsledek 1. *Každý komplexní polynom stupně n má n kořenů, včetně násobností.*

Důkaz. Nechť $\pi(\lambda)$ je polynom stupně n. Podle základní věty algebry existuje $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ takové, že $\pi(\lambda_0) = 0$. Označme polynom

$$\pi_1(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}.$$

Polynom $\pi_1(\lambda)$ je stupně $n-1$. Opět použijme základní větu algebry a označme

$$\pi_2(\lambda) = \frac{\pi_1(\lambda)}{\lambda - \lambda_1},$$

kde λ_1 je libovolný kořen polynomu $\pi_1(\lambda)$. Odtud pokračujeme induktivním postupem až do polynomu stupně 1. Zpětným dosazením dostáváme vztah

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_{n-1}),$$

kde $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ jsou kořeny polynomu $\pi(\lambda)$. Odtud plyne tvrzení. $\square$

Shrneme-li základní větu algebry a její důsledek, pak ke každému polynomu s komplexními koeficienty stupně většího než 1 lze nalézt kořen a těchto kořenů včetně násobnosti kořene je stejně jako stupeň tohoto polynomu. Podstatné je, že přestože víme, že existují, je pro některé polynomy obtížnější je nalézt. To by nám měla přiblížit následující věta, kterou uvedeme bez důkazu viz [5, str. 39].

Věta 1.7 (Abelova–Galoisova). *Nechť $\pi(\lambda)$ je komplexní polynom stupně n. Pokud $n \geq 5$, pak polynomiální rovnice $\pi(\lambda) = 0$ není řešitelná v radikálech.*

Radikály se rozumí vzorec složený pouze z operací $+$,$-$, $\cdot$, : a $\sqrt[k]{}$. Jinak řečeno Abelova–Galoisova věta říká, že pro polynomy s komplexními polynomy stupně 5 nebo vyššího, nejsme schopni nalézt konečný vzorec pro nalezení kořenů podobně jako u kvadratické nebo kubické rovnice. Na závěr sekce uveďme větu, kterou použijeme v důkazu věty 2.3. Důkaz věty lze nalézt jako důkaz tvrzení 9.47 v literatuře [14, str. 349].

Věta 1.8 (O reálném polynomu lichého stupně). *Každý reálný polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.*

Tímto bychom měli mít uvedeny základní pojmy k tomu, abychom mohli pracovat s vlastními čísly a vlastními vektory komplexních čtvercových matic a následně i zobecnit problematiku vlastních čísel.

2 Klasický problém vlastních čísel

V této kapitole se budeme zabývat klasickým problémem vlastních čísel čtvercových komplexních matic. V první řadě zavedeme pojmy jako vlastní číslo a vlastní vektor, popíšeme si způsob nalezení těchto vlastních čísel a vektorů. Následně dokážeme Schurův rozklad (věta 2.13) a Schurův rozklad pro normální matice (věta 2.14), který demonstruje, jak se vlastní čísla a vektory uplatňují při rozkladu matice. Nakonec si řekneme něco o Spektrálním a Jordanově rozkladu a jejich souvislost s Shurovým rozkladem. Mnoho příkladu využití vlastních čísel lze nálezt v [14, str. 329–336]. Nyní však přejdeme ke klíčovým definicím vlastních čísel a vektorů. Definice pochází z literatury [5, str. 8].

Definice (Úloha vlastních čísel (EP))**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n. Problémem vlastních čísel rozumíme nalezení skaláru $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulového vektoru $x \in \mathbb{C}^n$ takových, že*

$$Ax = \lambda x.$$

Skalár λ nazýváme vlastní číslo a nenulový vektor x nazýváme vlastní vektor.

Jedná se tedy o řešení maticové úlohy, kterou splňuje pouze podmnožina nenulových vektorů $x \in \mathbb{C}^n$ a podmnožina skalárů $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.1 Charakteristický polynom

Klasický problém vlastních čísel se typicky převádí na řešení problému hledání kořene komplexního polynomu. Tento přechod z matice na polynom, probýhá následujícím způsobem. Předpokládejme, že A je komplexní čtvercová matice řádu n, $\lambda \in \mathbb{C}$ je její vlastní číslo a x je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ, potom

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ Ax - \lambda I_n x &= 0 \\ (A - \lambda I_n)x &= 0 \\ (\lambda I_n - A)x &= 0 \end{aligned}$$

viz [14, str. 342]. Matici $(\lambda I_n - A)$ na levé straně rovnice nazýváme charakteristickou maticí matice A. Na tuto matici lze pohlížet jako na maticový polynom prvního stupně [1, str. 219]. Jelikož $x \neq 0$ z definice vlastního vektoru, pak zobrazení

$(A-\lambda I_n):\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ zobrazí nenulový vektor x na nulový vektor. Odtud z charakterizace singulárních matic (věta 1.1) plyne, že $(\lambda I_n - A)$ je singulární matice a tedy charakteristická matice $(\lambda I_n - A)$ je singulární právě tehdy, když

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

viz [10, str. 277]. Opačným postupem lze dokázat, že $\det(\lambda I_n - A) = 0$, potom λ je vlastní číslo matice A viz [10, str. 277].

Nyní na okamžik předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je neznámá. Z definice determinatu, totiž lze nahlédnout, že $\det(\lambda I_n - A)$ je komplexní polynom řádu n. Pokud bychom násobili prvky na hlavní diagonále matice $(\lambda I_n - A)$ dostame člen obsahující λ^n. Tento polynom se nazývá charakteristický polynom a pro úplnost si jej definujme

Definice (charakteristický polynom)**.** *Nechť A je čtvercová matice řádu n. Charakteristickým polynomem matice A rozumíme polynom $p(\lambda)$ takový, že*

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Definice je převzata z knihy [13, str. 8]. Lze si rozmyslet, že tento polynom je navíc monický tj. pro polynom $\pi(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k, a_n = 1$. Nyní jsme EP převedli na problém hledání kořene polynomu s komplexními koeficienty a dokázali následující charakterizační větu jak je uvedeno v [6, str. 320].

Věta 2.1 (Charakterizace vlastních čísel)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak jsou násedující výroky ekvivalentní.*

(a) λ je vlastní číslo matice A.

(b) $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

(c) vlastní číslo je kořenem charakteristického polynomu $p(\lambda)$.

Povšimněte si, že tímto způsobem jsme k nalezení vlastního čísla, nepotřebovali existenci. Problém vša nastává v jejich hledání, neboť podle Abel–Galoisovy věty (věta 1.7) pro polynomy s komplexními koeficienty stupně větší než 5 neexistuje konečný vzorec složený ze sčítání, násobení a umocňování.

V některých případech jsme dokonce schopni za určitých okolností říci, jaké jsou vlastní čísla jedné matice pokud známe vlastní čísla matice druhé (věta 2.2), můžeme omezit množinu hodnot, kterých může alespoň jedno vlastní číslo nabývat (věta 2.3) nebo dokonce rozhodnout jaké vlastní číslo musí obsahovat, pokud je matice daného typu (věta 2.4). K důkazům těchto tvrzení nám pomůže charakteristický polynom.

Věta 2.2 (O vlastních číslech transponované matice)**.** *A a A^T mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. Zajisté platí, že $(\lambda I_n - A) = (\lambda I_n - A^T)^T$. Potom dostáváme

$$\det(\lambda I_n - A) = \det((\lambda I_n - A^T)^T) = \det(I_n - A^T).$$

Druhá rovnost plyne z věty o aritmetice determinatu (veta 1.2. z věty o charakterizaci vlastních čísel (věta 2.1), již plyne tvrzení. □

Z věty o komplexní matici a vlastních číslech a o polynomu lichého stupně (věta 1.8) lze odvodit následující tvrzení.

Věta 2.3 (O reálné matici a vlastním čísle)**.** *Každá reálná čtvercová matice A lichého řádu má alespoň jedno reálné vlastní číslo.*

Důkaz. Nechť A je reálná čvercová matice lichého řádu, pak charakteristický polynom $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ je polynom lichého stupně s reálnými koeficienty. Z věty o polynomu lichého stupně (věta 1.8) plyne existence reálného kořene, který je vlastním číslem matice A. Odtud plyne tvrzení. □

K důkazu poslední věty potřebujeme dokázat jednoduchý vztah, který nebudeme uvádět ve větě. Předpokládejme, že A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak pro absolutní koeficient α_0 charakteristického polynomu $\chi_A(\lambda)$ platí

$$\alpha_0 = (-1)\det(A) \tag{2.1}$$

Ukažme si, že vlastnost (2.1) doopravdy platí. Rozepišeme si charakteristický polynom $\chi_A(\lambda)$ jako

$$\chi_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

Pak platí, že $\chi_A(0) = \alpha_0$ a tedy

$$\alpha_0 = \chi_A(0) = \det(0.I_n - A) = \det(-A) = (-1)\det(A).$$

Tím by byla ověřena vlastnost (2.1). Větu, která nám určuje vztah mezi vlastními čísly a singulární maticí, kterou lze nalézt v [14, str. 338].

Věta 2.4 (O singulární matici a vlastním čísle)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak jsou následující dva výroky ekvivalentní*

(i) A je singulární.

(ii) Vlastní číslo matice A je 0.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$ (b) Jestliže A je singulární matice, pak z vlastnosti (2.1) pro absolutní koeficient α_0 charakteristického polynomu $\chi_A(\lambda)$ platí

$$\alpha_0 = (-1)\det(A) = 0.$$

Potom rozepsáním a úpravami charakteristického polynomu platí

$$\chi_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$
$$\chi_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \cdots + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda$$
$$\chi_A(\lambda) = \lambda(\alpha_n\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_2\lambda + \alpha_1).$$

Odtud rozepsáním polynomu $\chi_A(\lambda)$ na kořenové činitele plyne, že jedním z kořenů charakteristického polynomu $\chi_A(\lambda)$ je 0.

(b) $\Rightarrow$ (a) Jestliže vlastní číslo matice A je 0, pak

$$0 = \det(\lambda I_n - A) = \det(0I_n - A) = \det(-A) = (-1)\det(A).$$

Odtud dostáváme, že $\det(A) = 0$. Z věty o charakterizaci singulárních matic (věta 1.1) plyne, že A je singulární matice. □

Tím bychom sekci o charakteristickém polynomu matice A uzavřeli. Ukázali jsme si, že převedením EP na charakteristický polynom, odpovídají vlastní čísla matice A kořenům charakteristického polynomu. Nyní si ukážeme čemu odpovídají vlastní vektory matice A známe-li vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$.

2.2 Vlastní vektory

Způsob nalezení vlastních vektorů probíhá z počátku obdobným způsobem, jako nalezení vlastních čísel. Opět předpokládejme, že A je komplexní čtvercová matice řádu n, $\lambda \in \mathbb{C}$ je její vlastní číslo a x je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ, potom

$$Ax = \lambda x$$
$$(\lambda I_n - A)x = 0.$$

Nyní je třeba vyřešit homogenní soustavu rovnic $(\lambda I_n - A)x = 0$ a najít všechna její nenulová řešení tj.

$$x \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)\ ,\ x \neq 0$$

viz [14, str. 342]. K tomu je potřeba znát vlastní číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ ke kterému se vlastní vektor vztahuje, neboť příslušné vlastní číslo ovlivňuje tvar homogenní soustavy rovnic a tím určuje množinu vlastních vektorů příslušné k danému vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$. Dále je třeba si uvědomit, že triviální řešení rovnice $x = 0$ není vlastním vektorem matice A příslušné k λ, protože nesplňuje definici vlastního vektoru ($x \neq 0$).

Jelikož je charakteristická matice $(A - \lambda I_n)$ singulární, což jsme si již odvodili v předchozí sekci o charakteristickém polynomu (sekce 2.1), pak z charakterizace singulárních matic (věta 1.1, (iii)) víme, že nějaké nenulové řešení mít musí. Nyní tento výsledek zapíšeme pomocí charakterizační věty. Důkaz jsme prakticky provedli od počátku sekce 2.2.

Věta 2.5 (Charakterizace vlastnich vektorů). *Nechť A je komplexní čtvercová matice a $\lambda \in \mathbb{C}$ je její vlastní číslo, pak jsou následující výroky ekvivalentní*

(i) $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ *je vlastní vektor matice A příslušný k vlastnímu číslu λ.*

(ii) $x \in \mathbb{C}^n$ *je nenulovým řešením homogenní rovnice $(\lambda I_n - A)x = 0$.*

(iii) $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)$, $x \neq 0$.

Protože je matice $(\lambda I_n - A)$ singulární, pak je ke každému vlastnímu číslu nekonečně mnoho vlastních vektorů, neboť soustava

$$(\lambda I_n - A)x = 0$$

má nekonečně mnoho řešení, z čehož mimo jiné vyplývá následují věta.

Věta 2.6 (O vlastních vektorech). *Nechť A je komplexní čtvercová matice,$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A a $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$ jsou vlastní vektory matice A příslušné k vlastnímu číslu λ, pak*

(a) je-li $\alpha \neq 0$, pak $(\alpha x_1), (\alpha x_2)$ jsou vlastní vektory matice A příslušné k λ,

(b) je-li $\alpha, \beta \neq 0$, pak $(\alpha x_1 + \beta x_2)$ jsou vlastní vektory matice A příslušné k λ.

Důkaz. (a) $A(\alpha x_1) = \alpha A x_1 = \alpha \lambda x_1 = \lambda(\alpha x_1)$, Vektor (αx_2) dokážeme analogicky.

(b) $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A(\alpha x_1) + A(\beta x_2) = \lambda(\alpha x_1) + \lambda(\beta x_2) = \lambda(\alpha x_1 + \beta x_2)$ V druhé rovnosti jsme využili (a).

□

Právě proto, že je k jednomu vlastnímu číslu matice A existuje nekonečně mnoho vlastních vektorů, pak vlastní vektory vyjadřujeme, buď množinou vlastních vektorů, kterou si označíme stejně jako v [14, str. 342],

$$M_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n; (\lambda I_n - A)x = 0\},$$

nebo pomocí největší možné lineárně nezávislé posloupnosti vlastních vektorů $\{x_\ell\}_{\ell=1}^k$.

2.3 Průvodní matice

Motivace průvodní matice může být následující. Máme-li monický polynom $\pi(\lambda)$ řádu n, pak v některých případech potřebujeme k tomuto polynomu $\pi(\lambda)$ nalézt komplexní čtvercovou matici řádu n takovou, že $\pi(\lambda)$ je její charakteristický polynom. V této sekci si ukážeme, že každý monický polynom řádu n je charakteristickým polynomem nějaké komplexní čtvercové matice a jak takovou matici můžeme zkonstruovat. Taková matice rozhodně není jednoznačně určená, protože z věty o vlastních číslech transponované matice, plyne, že A a A^T mají stejná vlastní čísla a tudíž i stejný charakteristický polynom. Jednu z takových matic nazýváme průvodní a v této práci jí stejně jako v literatuře [5, str. 29] budeme definovat takto.

Definice (Průvodní matice)**.** *Nechť $\pi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_0$ je monický polynom řádu n. Průvodní maticí P_π polynomu $\pi(\lambda)$ rozumíme matici*

$$P = P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nyní si povíme něco o charakteristickém polynomu průvodní matice a jeho vztahu s polynomem, který určuje průvodní matici [5, str. 29].

Věta 2.7 (O charakteristickém polynomu průvodní matice)**.** *Nechť $\pi(\lambda)$ je monický polynom řádu n a $P(\pi)$ je jeho průvodní matice. Pak platí*

$$\pi(\lambda) = \chi_{P_\pi}(\lambda).$$

Důkaz. Rozvojem determinatu podle posledního sloupce dostáváme

$$\chi_{P_\pi} = \det(\lambda I_n - P) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \alpha_{n-1} + \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+1}\alpha_0 \begin{vmatrix} -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{n+2}\alpha_1 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^{n+3}\alpha_{n-2} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{2n}(\alpha_{n-1} + \lambda) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Poté nalezneme blokové dělení takové, že matice subdeterminantů bude mít následující strukturu

$$\begin{vmatrix} U & 0 \\ 0 & L \end{vmatrix},$$

kde U je horní trojúhelníkový a L dolní trojúhelníkový maticový blok. Podle věty o determinantu horní (resp. dolní) trojúhelníkové matice a determinantu horní blokové matice platí, že

$$\chi_{P_\pi} = \det(\lambda I_n - P) = \alpha_0(-1)^{2n} + \alpha_1\lambda(-1)^{2n} + \ldots + \lambda^{n-1}(\alpha_{n-1} + \lambda) =$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Odtud plyne tvrzení. □

Z této věty vyplývá, že pro každý monický polynom $\pi(\lambda)$ řádu n, lze nalézt komplexní čtvercovou matici A řádu n takovou, že $\chi_A(\lambda)$ je její charakteristický polynom. K polynomu $\pi(\lambda)$ totiž nalezneme jeho průvodní matici, která tuto vlastnost splňuje.

Věta 2.8 (O matici a průvodní matice)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice a P_{χ_A} je průvodní matice charakteristického polynomu $\chi_A(\lambda)$. Pak matice A a P mají stejná vlastní čísla.*

Důkaz. z věty 2.7 plyne, že

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{P_{\chi_A}}(\lambda)$$

Odtud z věty o charakterizaci vlastních čísel (věta 2.1) plyne tvrzení. □

V sekci charakteristický polynom (sekce 2.1) jsme si ukázali, že komplexní čtvercová matice A řádu n má stejná vlastní čísla jako matice A^T. Nyní jsme si podle věty (věta 2.8) ukázali, že existuje minimálně další matice se shodnými vlastními čísly. Díky tvrzením z této sekce můžeme učinit následující závěry. Známe-li komplexní čtvercovou matici, pak známe její charakteristický polynom (věta 2.1). K libovolnému monickému polynomu $\pi(\lambda)$, lze nalézt komplexní čtvercovou matici takovou, že $\pi(\lambda)$ bude jejím charakteristickým polynomem (věta 2.7), nicméně je charakteristickým polynomem i mnoha dalších matic (věta 2.2,2.8). Z těchto důvodů plyne, že známe-li pouze charakteristický polynom neznámé čtvercové matice a nelze tak k charakteristickému polynomu jednoznačně určit matici.

2.4 Algebraická a geometrická násobnost

Algebraická násobnost souvisí s počtem stejných vlastních čísel, zatímco geometrická násobnost s počtem lineárně nezávislých vlastních vektorů jednoho daného vlastního čísla. Definujme si jí následovným způsobem.

Definice (Algebraická a geometrická násobnost)**.** *Nechť A je matice $n \times n$ a λ je její vlastní číslo.*

> *Algebraickou násobností vlastního čísla λ rozumíme jeho násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu matice A.*

Geometrickou násobností vlastního čísla λ rozumíme dimenzi vektorového prostoru generovaného vlastními vektory čísla λ

Algebraickou násobnost značíme $\mathrm{alg}(\lambda)$ a geometrickou násobnost $\mathrm{geo}(\lambda)$.

2.4.1 Podobnost

K tomu, abychom se mohli bavit o Schurově rozkladu (nebo v další sekci o spektrálním nebo Jordanově rozkladu), je nutné si definovat podobnost dvou matic se kterým všechny rozklady přímo souvisí. Tím v této sekci začneme. Definici lze nalézt též například v literatuře [1, str. 235].

Definice (Podobnost matic)**.** *Nechť A, B jsou komplexní čtvercové matice řádu n. Řekneme, že matice A, B si jsou podobné, pokud existuje regulární matice X taková, že*

$$A = XBX^{-1}.$$

Podobnost dvou matic, též někdy nazýváme podobností transformací. Nyní si položíme otázku: Jsou-li si dvě matice podobné, jak moc „podobné" jsou jejich vlastní čísla? Na to nám odpoví následující věta s literatury [14, str. 327].

Věta 2.9 (O podobnosti matic a charakteristickém polynomu)**.** *Nechť A, B jsou podobné matice, potom mají stejný charakteristický polynom.*

Důkaz. Nechť $\chi_A(\lambda)$ je charakteristický polynom matice A, pak

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - XBX^{-1}) = \det(X(\lambda I_n)X^{-1} - XBX^{-1}) =$$
$$= \det(X(\lambda I_n - B)X^{-1}) = \det(X)\det(\lambda I_n - B)\det(X^{-1}) = \det(\lambda I_n - B) = \chi_B(\lambda),$$

přičemž druhá rovnost je využití předpokladu podobnosti $\exists X, \det(X) \neq 0 : A = XBX^{-1}$, pátá rovnost a předposlední rovnost plyne z věty O součinu determinantů (věta 1.2). $\square$

2.4.2 Vztahy mezi násobnostmi

Algebraická a geometrická násobnost spolu mají určitý vztah, který vyjadřuje následující věta.

Věta 2.10 (Vztah algebraické a geometrické násobnosti)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n a λ je její vlastní číslo, pak platí*

$$\mathrm{alg}(\lambda) \geq \mathrm{geo}(\lambda)$$

Důkaz. Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo, $k = \mathrm{geo}(\lambda)$ a $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}$ vzájemně nezávislou posloupnost vlastních vektorů příslušné vlastnímu číslu λ tj.

$$Av_i = \lambda_0 v_i, \ i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Zvolme libovolné $v_{k+1}, \ldots, v_n$, tak aby $(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} \ldots, v_n)$ byla lineárně nezávislá posloupnost vektorů a označme $V = (v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} \ldots, v_n)$, pak

$$AV = (\lambda_0 v_1, \ldots, \lambda_0 v_k, Av_{k+1} \ldots, Av_n).$$

Vynásobením rovnice V^{-1} zleva dostáváme

$$\begin{aligned} V^{-1}AV &= (\lambda_0 V^{-1} v_1, \ldots, \lambda_0 V^{-1} v_k, V^{-1} A v_{k+1} \ldots, V^{-1} A v_n) = \\ &= (\lambda_0 e_1, \ldots, \lambda_0 e_k, V^{-1} A v_{k+1} \ldots, V^{-1} A v_n) = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_0 I_k & F \\ 0 & G \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Navíc z věty o podobnosti matic a charakteristickém polynomu (věta 2.9) platí, že A a $V^{-1}AV$ mají stejná vlastní čísla. Pak

$$\chi_{V^{-1}AV}(\lambda) = \det(\lambda I_n - V^{-1}AV) = \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_0) I_k & F \\ 0 & \lambda I_{n-k} - G \end{vmatrix},$$

kde $F \in \mathbb{C}^{n \times n-k}$a $G \in \mathbb{C}^{n-k \times n-k}$. Pak z věty o determinantu horní trojúhelníkové matice (věta 1.4) platí

$$= |(\lambda - \lambda_0) I_k| \cdot |\lambda I_{n-k} - G| = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot |\lambda I_{n-k} - G|.$$

Odtud plyne, že vlastních čísel λ_0 vzhledem k matici A je alespoň k.

□

Nyní si zodpovíme otázku kolik vlastních čísel může mít komplexní čtvercová matice řádu n. Tvrzení pochází z literatury [14, str. 357].

Věta 2.11 (O vlastních číslech a algebraické násobnosti)**.** *Každá komplexní čtvercová matice A má právě n vlastních čísel včetně algebraických násobností.*

Důkaz. Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n. Pak charakteristický polynom $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ je komplexní polynom. Takový polynom má z důsledku Základní věty algebry n kořenů, které jsou vlastními čísly matice A. Násobnost kořenů se rovná algebraické násobnosti kořenů vlastního čísla. Odtud plyne tvrzení. □

Z předchozí věty bezprostředně plyne, že pro každou komplexní čtvercovou matici A řádu n platí

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \mathrm{alg}(\lambda) = n.$$

Tím bychom sekci o algebraické a geometrické násobnosti zakončili. V sekci o podobnosti a Jordanově rozkladu (sekce 2.7) si pomocí vztahu algebraické a geometrické násobnosti (věta 2.10) charakterizujeme matice diagonalizovatelné a ty, které nejsou diagonalizovatelné.

2.5 Spektrum

V této sekci si definujeme spektrum matice viz [1, str. 219] a též si povíme něco o jeho vlastnostech, které budeme využívat v následujících kapitolách.

Definice (Spektrum matice)**.** *Nechť A je komplexní čtverová matice řádu n. Spektrem matice A rozumíme množinu vlastních čísel $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ Spektrum matice A budeme značit* $\mathrm{sp}(A)$.

Máme-li tedy čtvercovou matici A řádu n a spektrum $\mathrm{sp}(A)$ jakožto množinu složenou složenou s vlastních čísel matice A, pak z věty 2.11 plyne, že

$$|\mathrm{sp}(A)| \leq n,$$

přičemž rovnost nastane právě tehdy když $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \mathrm{alg}(\lambda_i) = 1$, neboli všechny vlastní čísla matice A budou různá. Následující věta nám řekně o hodnotách, které mohou vlastní čísla nabývat.

Věta 2.12 (Vlastnost spektra)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak* $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{C}$.

2.6 Schurův rozklad

Prvním z maticových rozkladů související s vlastními čísly a vektory klasického problému, o kterém se v této práci zmíníme, nazýváme Schurovým rozkladem. Jeho význam je předeším důležitý pro numerickou matematiku, neboť nám dává způsob nalezení úlohy vlastních čísel, aniž by docházelo „k velikým nepřesnostem“, které do výpočtu přínáší vstupní data [5, str. 37]. Nicméně náš náhled na Schurův rozklad bude pouze v teoretické rovině.

Důsledkem předchozí věty plyne že podobné matice mají stejná vlastní čísla. Avšak obrácená implikace neplatí. Máme-li dvě komplexní čtvercové matice A a B, které mají stejná vlastní čísla, pak nelze rozhodnout, že matici A, B jsou podobné. Tvrzení podpoříme protipříkladem. Předpokládejme, že každé dvě komplexní čtvercové matice, které mají stejná vlastní čísla si jsou podobné. Pro každou regulární matici X řádu n, plyne že $XI_nX^{-1} = XX^{-1} = I_n$, tj. jednotková matice je podobná pouze sama sobě. Charakteristický polynom jednotkové matice I_2 je

$$\chi_{I_2}(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

a tedy $\lambda = 1,\ \mathrm{alg}(\lambda) = 2$. Průvodní matice P polynomu $\chi_{I_2}(\lambda)$ má z věty (2.8) stejná vlastní čísla včetně násobností jako matice I_2, nicméně I_2 a P si nejsou podobné, protože jednotková matice je podobná pouze sama sobě. To je spor.

(i) Matice A, B jsou podobné.

(ii) Matice A, B mají stejný charakteristický polynom.

(iii) Matice A, B mají stejná vlastní čísla.

Pak pro následující výroky platí následující vztah

$$(i) \not\Leftarrow\Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii).$$

Nyní již můžeme přijít k Schurově věta, která je nosným kamenem Schurova rozkladu. Tvrzení a důkaz pochází z [5, str. 37–38].

Věta 2.13 (Schurova)**.** *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n. Pak existuje unitární matice Q řádu n a horní trojúhelníková matice U řádu n s vlastními čísly matice A na hlavní diagonále taková, že*

$$A = QUQ^*.$$

Navíc je první sloupec q_1 matice Q vlastním vektorem matice A příslušné k vlastnímu číslu λ_1.

Důkaz. V důkazu věty dokážeme, že $U = Q^*AQ$ je horní trojúhelníková matice s uvedenými vlastnostmi. Důkaz provedeme indukcí podle řádu n. Pro řád 1 tvrzení zřejmě platí. Nechť platí i pro řád $n-1$. Ukažme, že platí i pro n. Nechť A je čtvercová matice řádu n.

Označme $\chi_A(\lambda) = \det(I\lambda - A)$. $\chi_A(\lambda)$ je komplexní polynom, tedy podle základní věty Algebry (věta 1.6) existuje, alespoň jeden kořen $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Podle věty o charakterizaci vlastního čísla (věta 2.1) je kořen λ_1 polynomu $\chi_A(\lambda)$ roven vlastnímu číslu matice A.

Označme q_{λ_1} vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu λ_1. Označme $q_1 = \frac{q_{\lambda_1}}{\|q_{\lambda_1}\|}$. Potom q_1 je také vlastní vektor matice A příslušný k λ_1 a platí $Aq_1 = \lambda_1 q_1$. Nalezneme vektory $q_2, \ldots, q_n$ takové, že $Q_n = (q_1, \ldots, q_n)$ je unitární matice. Označme $Q_2 = (q_2, \ldots, q_n)$. Potom

$$Q_n^* A Q_n = Q_n^* A(q1, Q_2) = Q_n^*(Aq_1, AQ_2) = Q_n^*(\lambda q_1, AQ_2) = \begin{pmatrix} q_1^* \\ Q_2^* \end{pmatrix} (\lambda q_1, AQ_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} q_1^*\lambda q_1 & q_1^* AQ_2 \\ Q_2^*\lambda q_1 & Q_2^* AQ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* AQ_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & Q_2^* AQ_2 \end{pmatrix}.$$

Označme $A_{n-1} = Q_2^* AQ_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$. Pro řád $n-1$ Shurova věta platí podle indukčního předpokladu, odtud plyne, že existuje unitární matie $Q_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ a horní trojúhelníková matice $U_{n-1} \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ takové, že

$$A_{n-1} = Q_{n-1} U_{n-1} Q_{n-1}^*,$$

pak platí

$$Q_n^* A Q_n = \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* AQ_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* AQ_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & Q_{n-1} U_{n-1} Q_{n-1}^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* A Q_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^* \end{pmatrix}$$

je unitární. Nyní dostáváme vztah

$$Q_n^* A Q_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* A Q_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

Upravme

$$A = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* A Q_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^* \end{pmatrix} Q_n^*.$$

Označíme-li

$$Q = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* A Q_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & U_{n-1} \end{pmatrix},$$

pak z vlastností inverzních matic platí

$$A = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda q_1^* q_1 & q_1^* A Q_2 \\ \lambda Q_2^* q_1 & U_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^* \end{pmatrix} Q_n^* = QUQ^{-1} = QUQ^{-1}.$$

Třetí rovnost plyne z toho, že Q je unitární matice, neboť z věty o vlastnostech unitárních matic (věta1.5) plyne, že součin unitárních matic je unitární matice. Nyní je třeba ukázat, že U je horní trojúhelníková matice, což nastane právě tehdy, když dokažeme, že $\lambda q_1^* q_1 = \lambda$ a $\lambda Q_2^* q_1 = 0$. Jelikož $Q_N = (q_1, \ldots, q_n)$ je unitární matice, pak skalární součin

$$q_i^* q_j = \begin{cases} 1 & \text{pokud } i = j, \\ 0 & \text{pokud } i \neq j. \end{cases}$$

Odtud

$$\lambda q_1^* q_1 = \lambda.1 = \lambda$$

a

$$\lambda Q_2^* q_1 = \lambda (q_2, \ldots, q_n)^* q_1 = \lambda \begin{pmatrix} q_2^* q_1 \\ \vdots \\ q_n^* q_1 \end{pmatrix} = 0.$$

z toho plyne, že U je horní trojúhelníková a tímto je důkaz dokončen. □

Vlastní čísla mohou být uspořádány podle velikosti nebo zcela náhodně, věta to nikterak nezakazuje. Nyní si můžeme zadefinovat Shurův rozklad [5, str. 38].

Definice (Shurův rozklad). *Řekneme, že Shurův rozklad matice A je rozklad*

$$A = QUQ^*$$

z předchozí věty.

Na začátku sekce jsme si řekli, že Schurův rozklad nějakým způsobem souvisí s podobností matic. Opravdu tomu tak je, neboť komplexní čtvercová matice A je podobná horní trojúhelníkové matici U. Ze vztahu $QQ *= I_n$ a definice inverzní matice totiž okamžitě plyne, že $Q^* = Q^{-1}$ a tedy

$$A = QUQ^* = QUQ^{-1}.$$

Schurův rozklad je tedy speciálním případem podobnostní transformace. Formulovat Schurovu větu lze tedy i následovně: *Ke každé komplexní čtvercové matici A lze nalézt unitární matici Q takovou, že A je podobná horní trojúhelníkové matici H s vlastními čísly na hlavní diagonále.*

Nyní si položíme další otázku. Protože jsou vlastní čísla na hlavní diagonále, pro jaký druh matic A bude matice $U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$? Na otázku ihned odpovíme. Tento druh matic nazýváme normální matice a definujeme je takto.

Definice (Normální matice)**.** *Komplexní čtvercovou matici A nazveme normální, pokud*

$$AA^* = A^*A.$$

Nyní si dokážeme, že každá normální matice A je podobná diagonální matici D s vlastními čísly na diagonále v kontextu Schurova rozkladu.

Věta 2.14 (Shurova pro normální matice)**.** *Nechť A je normální matice řádu n. Pak existuje unitární matice Q řádu n a diagonální matice $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ řádu n s vlastními čísly na hlavní diagonále taková, že*

$$A = QUQ^*.$$

Navíc je sloupec q_i matice Q vlastním vektorem matice A příslušné k vlastnímu číslu λ_i.

Důkaz. Důkaz bude veden vesměs stejným způsobem, jako důkaz obecné Shurovy věty. V důkazu věty dokážeme, že $D = Q^*AQ$ je diagonální matice s uvedenými vlastnostmi. Důkaz provedeme indukcí podle řádu n. Pro řád 1 tvrzení zřejmě platí. Nechť platí i pro řád $n-1$. Ukažme, že platí i pro n. Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pak pole Shurovy věty existuje horní trojúhelníková matice $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ s vlastními čísly na hlavní diagonále a unitární matice $Q_n = (q_1, \ldots, q_n)$ taková, že

$$A = Q_n U Q_n^*.$$

Rozepišme si horní trojúhelníkovou matici U do blokové matice

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, U_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}, r \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}, 0 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times 1},$$

pak q_1 je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1. Podle indukčního předpokladu lze pro matici $H_1 \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ nalézt Shurův rozklad pro normální matice, tj. existuje unitární matice $Q_{n-1} = (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ a diagonální matice $D_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1\times n-1}$ taková, že $H_1 = Q^*_{n-1} D_{n-1} Q_{n-1}$. Potom

$$A = Q_n U Q_n^* = Q_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & n \\ 0 & Q^*_{n-1} D_{n-1} Q_{n-1} \end{pmatrix} Q_n^* =$$

$$= Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^*_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & D_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} Q_n^*.$$

Povšimněme si, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^*_{n-1} \end{pmatrix}$$

je z definice unitární matice. Označme

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & D_{n-1} \end{pmatrix}, \; Q = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^*_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pak, z věty o vlastnostech inverzních matic plyne, že

$$A = Q_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^*_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & D_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} Q_n^* = QDQ^{-1} = QDQ^*.$$

Třetí rovnost plyne z toho, že Q je unitární matice, neboť z věty o vlastnostech unitárních matic (věta 1.5) plyne, že součin unitárních matic je unitární matice.

Matice D je zajisté horní trojúhelníková. Navíc z její definice plyne, že D je diagonální právě tehdy, když $r^T = 0$. Nyní je tedy třeba ukázat, že $r = 0$. Nejprve dokažme, že D je normální.

$$DD^* = Q^*AQ(Q^*AQ)^* = Q^*AQQ^*A^*Q = Q^*AI_nA^*Q = Q^*AA^*Q$$

$$D^*D = Q^*AQ(Q^*AQ)^* = Q^*AQQ^*A^*Q = Q^*AI_nA^*Q = Q^*A^*AQ.$$

Jelikož A je normální matice, pak $Q^*A^*AQ = Q^*AA^*Q$ a tedy $DD^* = D^*D$. Potom

$$DD^* = D^*D$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ r^* & Q^*_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 \\ r^* & Q^*_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & r \\ 0 & Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nyní spočteme blok v prvním řádku a druhém sloupci tj.

$$\lambda\overline{\lambda} + rr^* = \overline{\lambda}\lambda$$

$$\|\lambda\| + \|r^T\| = \|\lambda\|$$

$$\|r^T\| = 0.$$

Odtud z definice normy plyne, že $r^T = 0$ a tedy D je diagonální matice. □

Tím bychom uzavřeli sekci o Schurově rozkladu a pokračovali sekcí o dalších rozkladech souvisejících s klasickou úlohou vlastních čísel.

2.7 Jordanův rozklad

Jordanův kánonický rozklad je jiný druhem rozkladu komplexní čtvercové matice A pomocí vlastních čísel, který jak již bylo řečeno vychází s podobnosti dvou matic stejně jako Schurův rozklad. Oproti Shurovu rozkladu $A = QUQ^* = QUQ^{-1}$, ubíráme předpoklad unitarity matice Q a naopak vyžadujeme,aby U byla diagonální. tj. pro každou matici A chceme nalézt X a D diagonální takovou, že $A = XDX^{-1}$.

Takový rozklad bohužel nelze nalézt pro všechny komplexní matice, což si později uvedeme ve větě 2.16. Proto bude potřeba oslabit předpoklad, že D je diagonální matice, a nahradit jej o „něco obecnější“ maticí.

2.7.1 Diagonalizovatelnost a spektrální rozklad

V prvé řadě si pojmenujeme množinu komplexních čtvercových matic A, pro které lze nalézt rozklad

$$A = XDX^{-1}$$

a to následující definicí.

Definice (diagonalizovatelné matice). *Komplexní čtvercovou matici A nazveme diagonalizovatelnou pokud je podobná diagonální matici*

Tento zápis je v některé literatuře pojmenován jako spektrální rozklad. Příkladem diagonalizovatelných matic jsou zajisté normální matice (věta 2.14). Tato věta navíc říkala, že matice, která je ve větě 2.14 označena Q je složená z vlastních jednotkových vektorů matice A. Toto ale platí obecně u každé diagonalizovatelné matice, jak říká následující věta, viz napr [5].

Věta 2.15 (Věta o spektrálním rozkladu). *Nechť A je diagonalizovatelná matice a $X = (x_1, \ldots, x_n)$ a $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ takové, že $A = XDX^{-1}$, pak x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ je vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ_i.*

Na pořadí vlastních čísel v předchozí větě nezáleží. Nyní přejdeme k charakterizaci diagonalizovatelných matic. Zde je třeba si připomenout, co je algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla a jaký mají mezi sebou vzájemný vztah. Spektrální věta totiž požaduje, aby byl „stejný počet“ vlastních čísel a vektorů. Důkaz následující věty lze nalézt v [14, str. 338].

Věta 2.16 (Charakterizace diagonalizovatlných matic). *Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n, pak jsou následující výroky ekvivalentní*

1. *Matice A je diagonalizovatelná.*
2. *Algebraická násobnost je rovna geometrické násobnosti pro každé vlastní číslo λ matice A.*

Pokud algebraická násobnost není rovna geometrické násobnosti pro každé vlastní číslo matice A, pak daná matice není diagonalizovatelná a tudíž neexistuje X a D diagonální takové, že $A = XDX^{-1}$. V takovém případě je třeba oslabit předpoklad diagonalizovatelné matice a přejít k obecnější matici. Z věty o vztahu algebraické a geometrické násobnosti (věta 2.10) navíc víme, že $\mathrm{alg}(\lambda) \geq geo(\lambda)$.

2.7.2 Jordanova věta

Jelikož všechny matice nejsou diagonalizovatelné. Potřebujeme najít třídu takových matic, aby jim libovolná komplexní čtvercová matice byla podobná. Takové matice se jmenují Jordanovy matice, tyto matice se skládají s nulových bloků a jordanových buňek, které si nyní definujeme [14, str. 350].

Definice (Jordanova buňka)**.** *Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ Jordanovou buňkou řádu k rozumíme komplexní čtvercovou matici $J_{\lambda,k}$ řádu k, to jest*

$$J_{\lambda,k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

V některých literaturách [5, str. 26] je Jordanova buňka nazývána též Jordanův blok. V triviálním případě, kdy $k = 1$ rozumíme Jordanovou buňkou $J_{\lambda,1} = (\lambda)$. Jordanova buňka je svojí strukturou velmi podobná diagonální matici. Pokud blokovou matici vyplníme Jordanovými buňkami získáme následující matici [1, str. 241].

Definice (Jordanův tvar)**.** *Řekneme, že matice J je v Jordanově tvaru, pokud*

(a) J je čtvercová komplexní matice.

(b) J je blokově diagonální a zároveň každý diagonální blok je Jordanova buňka.

to jest $J = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,k_1}, \dots, J_{\lambda_m,k_m})$ názorněji

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_m,k_m} \end{pmatrix}.$$

V některých literaturách je Jordanův tvar nazýván Jordanova matice [3, str. 116]. Lze si povšimnout,že dva libovolně vybrané Jordanovy bloky mohou obsahovat různé komplexní číslo λ a zároveň nemusí nabývat stejných řádů [14, str. 351]. Nyní, již jsme schopni pro každou matici nalézt matici takovou, aby se co nejvíce podobala diagonální matici. Důkaz lze nalézt v [14, str. 360].

Věta 2.17 (Jordanova). *Každá komplexní čtvercová matice A je podobná matici J v Jordanově tvaru tj. existuje matice X taková, že*

$$A = XJX^{-1}.$$

V rámci Jordanovy matice nezáleží v jakém pořádí jsou Jordanovy buňky seřazeny. Jordanovým rozkladem rozumíme rozklad

$$A = XJX^{-1}$$

z předchozí věty a lze jej využít při hledání řešení soustav homogeních lineárních diferenciálních rovnic s konstaními koeficienty viz [1, str. 282].

2.8 Shrnutí

V této sekci si shrneme poznatky z této kapitoly. Zavedli jsme si vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ a vlastní vektory $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ komplexní matice A splňující vztah

$$Ax = \lambda x.$$

Vlastní čísla jsou taková, která jsou kořeny charakteristického polynomu

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

a vlastní vektory $x \in \mathbb{C}^n$ příslušné k vlastnímu číslu λ rozumíme řešení homegenní rovnice

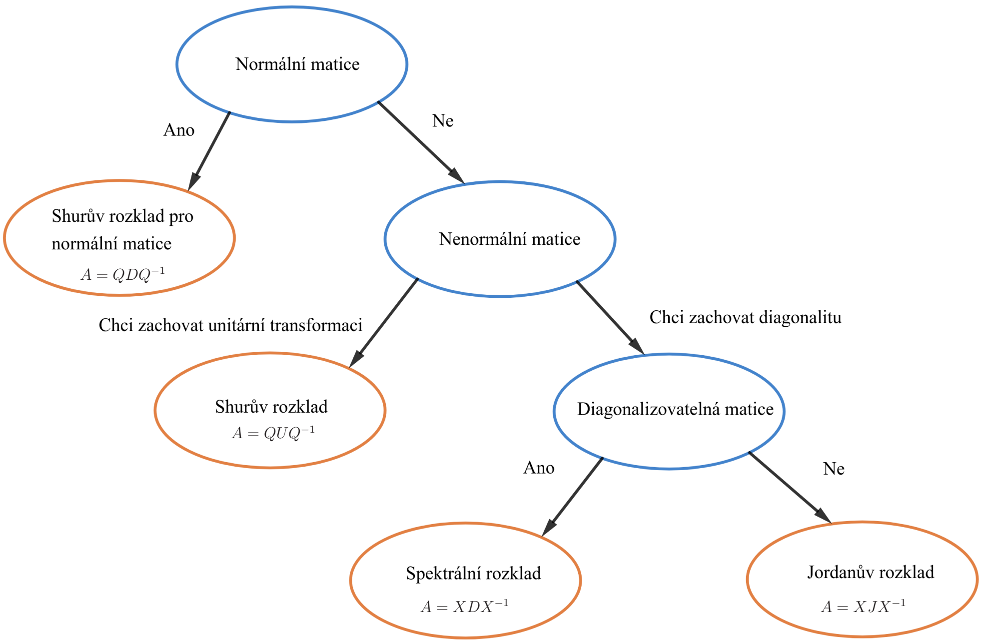
$$(\lambda I_n - A)x = 0,\ x \neq 0.$$

Zavedli jsme si algebraickou a geometrickou násobnost, kde algebraická násobnost vlastního čísla je násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu. Geometrickou násobností vlastního čísla rozumíme dimenzi vlastního prostoru

$$\{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\ ;\ (I_n\lambda - A)x = 0, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\},$$

které jsou lineárně nezávislé. Úloha vlastních čísel je tedy převedena na úlohu nalezení kořenů komplexního polynomu. Z důsledku Základní věty algebry (věta 1.6) má polynom právě n komplexních kořenů včetně násobností a tedy i n vlastních čísel, které se ztotožňují s kořeny charakteristického polynomu. Nicméně pokud je čtvercová matice A řádu 5 a více, pak její charakteristický polynom má stupeň větší nebo rovno 5 a podle Abelovy-Galoisovy věty (věta 1.7) neexistuje vzorec s konečně mnoha operacemi pro nalezení kořenů stupně větších než 5, a tudíž pro matice řádu 5 a výše lze hledat vlastní čísla pouze numericky [11, str. 43].

Následně jsme si prošli tři maticové rozklady související s vlastními čísly, které jsme shrnuli v obrázku 2.1. Poznamenejme, že



Obrázek 2.1: Vlastní čísla vyjevující rozklady dostupné pro různé (čtvercové) komplexní matice v závislosti na jejích vlastnostech. Od normálních až po obecné matice.

- Pro normální matice je Jordanův rozklad, Shurův rozklad i Spektrální rozklad totožný (tj. Rozkladem normální matice podle Jordanovy nebo Spektrální věty dostaneme stejný rozklad jako podle Shurovy věty pro normální matice).
- Pro nenormální matice není Shurův rozklad a Jordanův (resp. Spektrální) rozklad totožný.
- Pro diagonalizovatelné matice, lze ztotožnit Spektrální a Jordanův rozklad.
- Pro libovolnou komplexní čtvercovou matici existuje Shurův a Jordanův rozklad.
- Pro nediagonalizovatelné matice neexistuje Spektrální rozklad.

Nyní pokročíme na kapitolu, ve které si klasický problém vlastních čísel zobecníme.

3 GEP: Zobecněný problém vlastních čísel

Nyní přejdeme k prvnímu z možných zobecnění problému vlastních čísel a to přidáním kompexní čtvercové matice B na pravou stranu rovnice. Vlastní čísla a vlastní vektory se ve zobecněném případě nevztahují k jedné matici nýbrž k uspořádané dvojici matic (A, B). Tento problém budeme nazývat zobecněný problém vlastních čísel. Je dobré poznamenat, že většina literatury zabývájící se tématem vlastních čísel, ať už klasického, zobecněného, se zaměřuje na numerické způsoby nalezení vlastních čísel. Je dobré upozornit, že se nejedná o jediné možné zobecnění viz kapitoly 4 a 5. Právě v tomto kontextu by bylo výstižnější tuto úlohu nazývat zobecněný problém jako obecný lineární problém vlastních čísel, nicméně tak činit nebudeme. Nyní si definujeme zobecněná vlastní čísla a zobecněné vlastní vektory. Definice pochází z literatury [12].

Definice (Zobecněná úloha vlastních čísel (GEP))**.** *Nechť A, B jsou pevně dané komplexní čtvercové matice stejného řádu, pak úlohu*

$$Ax = \lambda Bx\,,\ x \neq 0$$

budeme nazývat zobecněnou úlohou vlastních čísel. Skalár λ nazýváme vlastní číslo nenulový vektor x nazveme vlastní vektor.

Tato vlastní čísla nazýváme vlastními čísly GEP z důvodu terminologického odlišení GEP od EP. Vlastní čísla a vektory GEP se totiž nevztahují k jedné komplexní čtvercové matici, ale k uspořádané dvojici matic. Je dobré si uvědomit, že uspořádaní dvojice hraje roli. Záleží zde totiž na pořadí matic, neboť úlohy $Ax = \lambda Bx$ a $Bx = \lambda Ax$ nejsou v obecném případě shodné.

3.1 Klasifikace

Zobecněný problém vlastních čísel, lze rozdělit na několik případů, z nichž některé případy lze převést na klasický problém vlastních čísel. Všechny tyto případy si uvedeme v tabulce 3.1.

V tabulce si lze povšimnout, že EP je jedním ze speciálních případů GEP a to v případě, kdy $B = I$ Jelikož jsme EP rozebýrali v kapitole 2, tak se nyní již budeme zabývat případem 2.

Tabulka 3.1: Jednotlivé varianty zobecněného problému vlastních čísel.

#	Typy zobecněného porblému vlastních čísel	$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$	$B \in \mathbb{C}^{n\times n}$
1.	Klasický problém (EP)	libovolná	jednotková
2.	Obrácený problém	jednotková	libovolná
3.	Regulární zobecněný problém	regulární	regulární
4.	Polosingulární zobecněný problém	singulární	regulární
5.	Obrácený polosingu1ární zobecněný problém	regulární	singulární
6.	Singulární zobecněný problém	singulární	singulární

3.2 Obrácený klasický problém

V této kapitole si odvodíme možný postup, jak převést obrácený klasický problém GEP na EP. Nyní předpokládejme GEP takový, že

$$Ax = \lambda Bx,\ A \in I_n,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Tuto rovnici lze zapsat i ve tvaru

$$x = \lambda Bx. \tag{3.1}$$

Nyní úpravami a substitucí převedeme výraz 3.1 na klasický problém vlastních čísel

$$\begin{aligned} x &= \lambda Bx \\ \lambda^{-1}x &= Bx. \end{aligned}$$

Označme $\sigma = \lambda^{-1}$ potom

$$\sigma x = Bx$$

a pro úplnou úpravu otočíme strany

$$Bx = \sigma x. \tag{3.2}$$

Rovnice 3.2 je EP s vlastními čísly σ. Vlastní čísla GEP jsou čísla σ^{-1}.

3.3 Regulární zobecněný problém

Jako v případě obráceného problému, lze i regulární zobecněný problém GEP převést na EP. Předpokládejme GEP takový, že

$$Ax = \lambda Bx\ ,\ \det(A) = det(B) \neq 0. \tag{3.3}$$

Úpravami a substitucí převedeme výraz 3.3 na klasický problém vlastních čísel. Narozdíl od obraceného klasického problému nebudeme substituovat skalár, ale matici.

V prvním kroku vynásobíme rovnici maticí B^{-1} zleva.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ B^{-1}Ax &= B^{-1}\lambda Bx \\ B^{-1}Ax &= \lambda B^{-1}Bx \\ B^{-1}Ax &= \lambda I_n x \\ B^{-1}Ax &= \lambda x. \end{aligned}$$

Označme $C = B^{-1}A$, pak

$$Cx = \lambda x.$$

Získaná rovnice je EP s regulární maticí C (součinem regulárních matic vznikne regulární matice) s vlastními čísly λ, která jsou vlastními čísly QEP.

3.4 Polosingulární zobecněný problém

Polosingulární problém nastává ve chvíli, kdy matice A je singulární a B je regulární matice. Tento problém lze řešit stejně jakov případě regulárního zobecněného problému (sekce 3.3), protože jsme v předpokladu nevyužívali předpokladu regularity A. Předpokládejme GEP takový, že

$$Ax = \lambda Bx \ , \det(A) = 0 \neq \det(B). \tag{3.4}$$

Potom obdobně jako sekci (sekce 3.3) dostáváme výraz

$$Cx = \lambda x, \ C = B^{-1}A.$$

Nalezneme vlastní čísla $\lambda_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ matice $C = B^{-1}A$, což jsou námi hledaná vlastní čísla QEP. Rozdíl oproti předchozímu regulárnímu problému je ten, že matice C je singulární matice.

3.5 Obrácený polosingulární zobecněný problém

Předpokládejme GEP takový, že

$$Ax = \lambda Bx \ , \ \det(A) \neq \det(B) = 0. \tag{3.5}$$

V takovém případě již nemůžeme postupovat analogicky jako v případě, kdy B byla regulární matice, což byl klíčový předpoklad. V tomto problému je třeba využít regularity matice A a násobit rovnici zleva. Tedy

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}(\lambda B)x \\ I_n x &= \lambda A^{-1}Bx. \end{aligned}$$

Označme $F = A^{-1}B$, pak
$$I_n x = \lambda F x$$
což je obrácený klasický problém (sekce 3.2). Vlastní čísla QEP jsou tedy podle sekce 3.2 čísla λ_i^{-1}, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

3.6 Singulární zobecněný problém

Úplný singulární GEPá ve chvíli, kdy A, B jsou singulární matice a nelze tedy využít žádnou z předchozích možností, jak případ převést na EP jiné komplexní čtvercové matice. Předpokládáme GEP takový, že

$$Ax = \lambda Bx, \det(A) = \det(B) = 0.$$

Potom

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ Ax - \lambda Bx &= 0 \\ \lambda Bx - Ax &= 0 \\ (\lambda B - A)x &= 0. \end{aligned}$$

Stejně jako u EP je i nyní $x \neq 0$ a tudíž hledáme λ pro které by $(\lambda B - A)$ byla singulární matice, což podle charakterizace singulárních matic, hledáme

$$\det(\lambda B - A) = 0.$$

Stejně jako v případě EP si i zde definujeme charakteristický polynom a charakteristickou matici.

Definice (charateristická matice, charakteristický polynom)**.** *Charakteristickou maticí GEP rozumíme matici*
$$(\lambda B - A).$$
Charakteristickým polynomem GEP rozumíme polynom

$$\chi_{A,B}(\lambda) = \det(\lambda B - A).$$

Navíc je nalezení kořenů charakteristického polynomu $\chi_{A,B}(\lambda)$ univerzálním řešením GEP, neboť není potřeba předpokládat žádné vlastnosti matic A, B. Předchozí převedení na EP však mohou ulehčit práci, neboť se s EP setkáváme, již v prvních ročnících vysokoškolského studia Matematiky.

3.7 Spektrum zobecněného problému

V kapitole 2 jsme si definovali spektrum komplexní čtvercové matice jako podmnožinu komplexních čísel obsahující všechna vlastní čísla. Obdobně si zavedeme spektrum i pro GEP.

Definice (Spektrum)**.** *Nechť A, B je komplexní čtverová matice řádu n. Spektrem matic A, B rozumíme množinu vlastních čísel GEP $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ Spektrum matic A, B budeme značit* $\mathrm{sp}(A, B)$.

V případě EP plyne že spektrum $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(A, I)$, kde A je komplexní čtvrcová matice.

Z věty 2.11 jsme se dozvěděli, že každá komplexní čtvercová matice A řádu n má n vlastních čísel včetně násobností. Z toho důvodu by nás zajímalo, zda pro každý pár komplexních čtvercových matic stejného řádu n, existuje právě n vlastních čísel včetně násobností kořene zobecněného charakteristického polynomu.

Tento výrok bohužel neplátí. Máme-li matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $A = I_2$, oboje řádu 2, pak

$$\chi_{A,B} = \det(\lambda B - A) = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 \cdot \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda - 1.$$

Kořen polynomu $\chi_{A,B}$ je $\lambda_1 = -1$. Tedy dostáváme pouze jedno vlastní číslo.

Je důležité poznamenat, že máme-li dvě komplexní čtvrcové matice A, B stejného řádu, pak $\mathrm{sp}(A, B)$ nemusí být obecně podmnožinou komplexních čísel, ale

$$\mathrm{sp}(A, B) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Nyní provedeme pozorování spektra GEP u všech případů uvedených výše. Základní myšlenkou důkazu bude převod GEP na EP ze sekce 3.2, 3.3, 3.4, 3.5. Poznamenejme, že pro EP je spektrum podmnožinou množiny $\mathbb{C}$.

Věta 3.1 (O zobecněném spektru dvojice matic)**.** *O zobecněném spektru dvojice komplexních čvercových matic platí následující výroky.*

(i) *Spektrum obráceného klasického problému je podmnožinou množiny* $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$.

(ii) *Spektrum regulárního zobecněného problému je podmnožinou množiny* $(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

(iii) *Spektrum polosingulárního zobecněného problému je podmnožinou množiny* $\mathbb{C}$.

(iv) *Spektrum obráceného polosingulárního zobecněného problému je podmnožinou množiny* $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$.

Důkaz. (i) Mějme dvě komplexní čtvrcové matice I_n, B stejného řádu n. Z odvození obráceného klasického problému (3.2) dostáváme, že

$$\lambda^{-1}x = Bx.$$

Označme $\sigma = \lambda^{-1}$. Prostým otočením stran rovnosti získáme vztah

$$Bx = \sigma x,$$

kde σ jsou klasická vlastní čísla. Z pozorování 2.12 víme, že pro spektrum matice B platí $\mathrm{sp}(B) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\} \subset \mathbb{C}$. Pak ze vztahu $\sigma_i = \lambda_i^{-1}$ plyne, že

(a) $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jestliže $\sigma_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $\lambda_i \in \{\infty\}$, jestliže $\sigma_i \in \{0\}$.

Odtud plyne výrok (i).

(ii) Mějme dvě regulární komplexní čtvrcové matice A, B stejného řádu n. Z odvození regulárního zobecněného problému (sekce 3.2) dostáváme, že

$$B^{-1}Ax = \lambda x.$$

Označíme-li $C = B^{-1}A$, pak C je regulární matice. Úloha

$$Cx = \lambda x$$

je klasický problém vlastních čísel. Z negace věty o singulární matici a vlastním čísle (věta 2.4) plyne, že vlastní čísla $\lambda \neq 0$. Odtud plyne výrok (ii).

(iii) Nechť A, B jsou komplexní čtvercové matice řádu n takové, že A je singulární a B je regulární matice. Z odvození polosingulárního zobecněného problému (sekce 3.4) dostáváme vztah

$$B^{-1}Ax = \lambda x.$$

Označíme-li $C = B^{-1}A$, pak C je singulární matice. Úloha

$$Cx = \lambda x$$

je klasický problém vlastních čísel. Z věty o singulární matici a vlastním čísle (věta 2.4) plyne, že alespoň jedno vlastní číslo $\lambda = 0$. Zbývající kořeny charakteristického polynomu $\chi_C(\lambda)$ již mohou nabývat libovolných hodnot. Odtud plyne výrok (iii).

(iv) Mějme dvě komplexní čtvrcové matice A, B stejného řádu n takové, že A je regulární a B je singulární. Z odvození obráceného polosingulárního zobecněného problému (sekce 3.5) dostáváme vztah

$$x = \lambda A^{-1}Bx.$$

Tabulka 3.2: Klasifikace spektra zobecněných problému

Typ problému	Spektrum
Klasický problém $Ax = x\lambda$	$\mathrm{sp}(A, I) \subset \mathbb{C}$
Obrácený problém $x = Bx\lambda$	$\mathrm{sp}(I, B) \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}$
Regulární z. problém	$\mathrm{sp}(A, B) \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})$
Polosingulární z. problém	$\mathrm{sp}(A, B) \subset \mathbb{C}, 0 \in \mathrm{sp}(A, B)$
Obrácený polosingulární z. problém	$\mathrm{sp}(A, B) \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\}, \infty \in \mathrm{sp}(A, B)$

Označme $D = A^{-1}B$, pak

$$x = \lambda Dx$$

což je obrácený klasický problém vlastních čísel (sekce 3.2). Odtud plyne, že obrácený klasický problém má spektrum, které je podmnožinou $(\mathbb{C}\setminus\{0\})\cup\{\infty\}$ Odtud plyne výrok (iv).

□

Nyní je potřeba rozmyslet si, jak by mohlo vypadat spektrum singulárnách zobecněného problému vlastních čísel. Mějme A, B singulární matice stejného řádu. Označme si $N_{A,B} = \ker A \cap \ker B$. Připomeňme, že

$$x \in \ker A \Leftrightarrow Ax = 0.$$

EP měl jistá omezení pro vlastní vektory tj. vlastní vektor $x \neq 0$. Pokud by totiž $x = 0$, pak

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ A \cdot 0 &= \lambda \cdot 0 \\ 0 &= \lambda 0, \end{aligned}$$

a proto nelze o vlastním čísle matice A nic říci. Pokud by v GEP vlastní vektor $x \in N_{A,B}$ tedy $Ax = Bx = 0$, pak dostáváme

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ 0 &= \lambda \cdot 0 \end{aligned}$$

a též nelze o vlastním vektoru nic říci. Proto musíme předpokládat, že $x \notin N_{A,B}$. Nyní mohou nastat tři případy a to následující:

(a) $\ker(A) \supsetneq \ker(B)$

(b) $\ker(A) \subsetneq \ker(B)$

(c) $\ker(A) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset \wedge \ker(B) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset$

Tabulka 3.3: Klasifikace spektra singulárního zobecněných problému

Případ	Spektrum
$\ker(A) = \ker(B)$	$0, \infty \notin \mathrm{sp}(A, B)$
$\ker(A) \supsetneq \ker(B)$	$0 \in \mathrm{sp}(A, B),\ \infty \notin \mathrm{sp}(A, B)$
$\ker(A) \subsetneq \ker(B)$	$\infty \in \mathrm{sp}(A, B),\ 0 \notin \mathrm{sp}(A, B)$
$\ker(A) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset \wedge \ker(B) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset$	$0, \infty \in \mathrm{sp}(A, B)$

Pokud $\ker(A) \supsetneq \ker(B)$, pak pro $x \in (\ker(A) \supsetneq \ker(B))$ platí

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ 0 &= \lambda Bx, \end{aligned}$$

jelikož $Bx \neq 0$ z definice množiny $\ker(A) \supsetneq \ker(B)$, pak $\lambda = 0$ a tedy

$$0 \in \mathrm{sp}(A, B),$$

přičemž x je vlastním vektorem GEP. Pokud $\ker(A) \subsetneq \ker(B)$, pak pro $x \in \ker(A) \subsetneq \ker(B)$ platí

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda Bx \\ Ax &= \lambda 0, \end{aligned}$$

jelikož $Ax \neq 0$ z definice množiny $\ker(A) \subsetneq \ker(B)$, pak $\lambda = \infty$ a tedy

$$\infty \in \mathrm{sp}(A, B),$$

přičemž x je vlastním vektorem GEP. V posledním případě, pokud $x \in \ker(A) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset$ stejným postupem jako v případě (a) dostáváme, že $0 \in \mathrm{sp}(A, B)$, kde x je vlastní vektor GEP, zatímco pro $y \in \ker(B) \setminus N_{A,B} \neq \emptyset$ získáme stejně jako u (b), že $\infty \in \mathrm{sp}(A, B)$ a y je vlastní vektor GEP tedy platí, že

$$0, \infty \in \mathrm{sp}(A, B).$$

Spektrum singulárního zobecněného problému je podmnožinou množiny $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

3.8 Vlastní vektory

Vlastní vektory lze nalézt podobným způsobem jako v případě klasického problému, řešením homogenní soustavy rovnic

$$(\lambda B - A)x = 0, x \neq 0.$$

3.9 Shrnutí

Zobecněný problém vlastních čísel

$$Ax = \lambda Bx$$

rozšiřuje možnosti řešení algebraických rovnic nad rámec klasického problému vlastních čísel. Řekli jsme si, že EP je jedním ze speciálních případů GEP. Pokud o maticích A, B nic nevíme, lze vždy použít obecný případ a tedy řešit GEP pomocí

$$\det(\lambda B - A) = 0.$$

Vlastní vektory GEP řešíme obdobně jako v případě EP tj. nalezením řešení soustavy rovnic

$$(\lambda B - A)x = 0, x \neq 0.$$

Uvedli jsme si také některé speciální případy QEP uvedené v sekcích 3.2, 3.3, 3.4 a 3.5, které lze převést jednoduchou úpravou z GEP na EP a u kterých jsme navíc zjišťovali jejich spektrum.

4 QEP: Kvadratické zobecnění problému vlastních čísel

V předchozí sekci jsme hovořili o zobecněném problému vlastních čísel $Ax = \lambda Bx$, kde po převedení na levou stranu rovnice jsme získali rovnici

$$(\lambda B - A)x = 0.$$

Zobecněnou *charakteristickou matici* $\lambda B - A$ lze vnímat jako lineární polynom proměnné λ s maticovými koeficienty A, B. Tuto zobecněnou charakteristickou matici, lze ještě zobecnit, a to tím způsobem, že nebudeme uvažovat tkzv. charakteristickou matici pouze jako lineární polynom, ale například jako polynom kvadratický

$$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0.$$

Zobecňovat lze ještě na obecný polynom libovolného řádu k s maticovými koeficienty, což si uvedeme v následující kapitole 5.

4.1 Kvadratický problém vlastních čísel

Nejprve se podíváme na kvadratický problém vlastních čísel, který [13, str. 236] definuje takto.

Definice (Kvadratická úloha vlastních čísel (QEP))**.** *Nechť A, B, C jsou komplexní čtvercové matice řádu n. Pak kvadratickou úlohou vlastních čísel (QEP) rozumíme nalezení $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulového vektoru $x \in \mathbb{C}^n$ splňující*

$$(\lambda^2 I_n + \lambda B + A)x = 0,$$

resp. zobecněnou kvadratickou úlohu vlastních čísel (GQEP) splňující

$$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0.$$

Skalár λ nazýváme vlastní číslo a nenulový vektor x nazýváme vlastní vektor.

Rozdíl oproti EP a GEP je zajisté ten, že EP a GEP jsou podmnožinou kvadratického problému vlastních čísel. Máme-li totiž kvadratický problém, pak pro $C = 0_n$

dostáváme GEP a pro $C, B = 0_n$ nastane EP. Dálším rozdílem je, že kvadratický problém má celkem $2n$ vlastních čísel a to buď konečných nebo nekonečných [13, str. 236].

V následujícím textu budeme předpokládat, že GQEP má vedoucí člen regulární, tj. Pro čtvercové matice A, B, C řádu n bude úloha tvaru

$$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0, \quad \det(C) \neq 0.$$

Případ, kdy C je singulární uvažovat v následující sekci nebudeme. Povšimněte si, že bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že

4.2 Bloková průvodní matice maticového polynomu regulární vedoucí maticí

K nalezení vlastních čísel se přistupuje obdobně jako k EP. Nechť A, B, C jsou komplexní čtvercové matice řádu n a

$$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0, \quad \det(C) \neq 0.$$

je GQEP. Protože $x \neq 0$ z definice vlastního vektoru, pak matice $\lambda^2 C + \lambda B + A$ musí být singulární. Z charakterizace singulárních matic tedy plyne, že vlastní čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ jsou taková, která splňují, že

$$\det(\lambda^2 C + \lambda B + A) = 0.$$

Výraz $\chi_{C,B,A}(\lambda) = \det(\lambda^2 C + \lambda B + A)$ budeme nazývat charakteristický polynom úlohy GQEP. Povšimněte si, že bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že $\chi_{C,B,A}(\lambda)$ je monický polynom tj.

$$\chi_{I_n,\hat{B},\hat{A}}(\lambda), \ \hat{B} = C^{-1}B, \ \hat{A} = C^{-1}A.$$

Proto pokud je vedoucí matice C regulární, lze převést jednoduše GQEP na QEP. Nyní se zaměříme na průvodní matici a definujeme si ji v blokové formě pro QEP. Mějme

$$M(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda B + A)x = 0.$$

Průvodní matici QEP uvažujeme komplexní matici P řádu $2n \times 2n$ takovou, že

$$P_M = \begin{pmatrix} 0_n & -A \\ I_n & -B \end{pmatrix}.$$

Nyní se podívejme, co splňují vlastní čísla matice P_M a jestli pomocí nich nelze určit vlastní čísla QEP. Pokud $\lambda = 0$, pak

$$\chi_{P_M}(0) = P_M = \det(-P_M) = \begin{vmatrix} 0_n & A \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \det(A),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o determinantu horní trojúhelníkové matice (věta 1.4). Pro charakteristický polynom QEP platí

$$\chi_{I_n,B,A}(0) = \det(0 \cdot I_n + 0 \cdot B + A) = \det(A),$$

proto $\chi_{I_n,B,A}(0) = \chi_{P_M}(0)$. Platí to však pro každé λ? Pokud $\lambda \neq 0$, pak

$$\chi_{P_M}(\lambda) = P_M = \det(\lambda I_n - P_M) = \begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ -I_n & \lambda I_n + B \end{vmatrix}.$$

Nyní vynásobíme první blokový řádek číslem $\frac{1}{\lambda}$ a přičteme jej k druhému blokovému řádku, tj.

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ -I_n & \lambda I_n + B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_n & -A \\ 0_n & \lambda I_n + B + \frac{1}{\lambda} A \end{vmatrix} = |\lambda I_n| \cdot \left| \frac{1}{\lambda} A + \lambda I_n + B \right|.$$

po roznásobení dostáváme požadovaný tvar tj.

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ I_n & \lambda I_n - B \end{vmatrix} = \left| \lambda^2 I_n + \lambda B + A \right|.$$

Odtud dostáváme vztah, který popisuje následující věta.

Věta 4.1 (O charakteristickém polynomu průvodní matice QEP)**.** *Nechť A, B, C jsou komplexní čtvercové matice řádu n,$(\lambda^2 I_n + \lambda B + A)x = 0$ je QEP a P_M je průvodní matice polynomu $M(\lambda) = \lambda^2 I_n + \lambda B + A$. Potom*

$$\chi_{I_n,B,A}(\lambda) = \chi_{P_M}(\lambda).$$

Těmto úpravám se v některých literatuře [8] říká tkzv. linearizace problému vlastních čísel, ačkoli tento pojem rozumíme trochu jinak než obvykle. Zde se pojmem linearizace rozumí převedení problému QEP na EP.

4.3 Vlastní vektory QEP

Připomeňme, že vlastním vektorem QEP rozumíme $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ takový, že

$$(\lambda^2 I_n + B\lambda + A)x = 0.$$

Vlastní čísla jsme dokázali nalézt pomoví tkzv. průvodní matice i tu také využijeme při hledání vlastních čísel QEP. Nejprve nalezněme vlastní vektory y průvodní matice P_M, $M = \lambda^2 I_n + B\lambda + A$ tj.

$$P_M y = \lambda y$$
$$\begin{pmatrix} 0_n & -A \\ I_n & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$
$$\begin{pmatrix} -Av_2 \\ v_1 - Bv_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix}.$$

odtud dostáváme dva vztahy

$$-Ay_2 = \lambda y_1 \tag{4.1}$$

$$y_1 - By_2 = \lambda y_2 \tag{4.2}$$

Nyní si z rovnice 4.1 výjadřeme y_1 a dosaďme do rovnice 4.2. Tím dostáváme tvar

$$-\frac{1}{\lambda}Ay_2 - By_2 = \lambda y_2 \tag{4.3}$$

a odtud úpravami

$$\begin{aligned} -Ay_2 - \lambda By_2 &= \lambda^2 y_2 \\ -Ay_2 - \lambda By_2 &= I_n\lambda^2 y_2 \\ I_n\lambda^2 v_2 + \lambda By_2 + Ay_2 &= 0 \\ (\lambda^2 I_n + B\lambda + A)y_2 &= 0. \end{aligned}$$

a tedy y_2 musí být vlastním vektorem QEP.

4.4 Poznámka k GQEP

Ukázali jsme si, že obecný kvadratický problém vlastních čísel tj.

$$(\lambda^2 C + \lambda B + A)x = 0$$

umíme převézt (tkzv. linearizovat) na EP dvojnásobné dimenze pokud $C = I_n$. Je-li vedoucí matice C regulární, odpovídající linearizace by vypadala následovně

$$\begin{pmatrix} 0_n & -C^{-1}A \\ I_n & -C^{-1}B \end{pmatrix} y = \lambda y, \qquad y \neq 0.$$

Poznamenejme, že je-li C singulární matice lze provést obdobnou podobu linearizace. Ta však nevede na EP, ale na *obrácený polosingulární zobecněný problém vlastních čísel* (sekce 3.5) dvojnásobné dimenze

$$\begin{pmatrix} 0_n & -A \\ I_n & -B \end{pmatrix} y = \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & C \end{pmatrix} y, \qquad y \neq 0.$$

Lze opět snadno ukázat, že tato úloha odpovídá úloze

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ -I_n & \lambda C + B \end{pmatrix} y = 0, \qquad y \neq 0.$$

Tedy matice na levé straně musí být singulární, tj.

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ -I_n & \lambda C + B \end{vmatrix} = 0.$$

Eliminací bloku $-I_n$ pak dostáváme (pro $\lambda \neq 0$)

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & A \\ 0 & \lambda C + B + \frac{1}{\lambda} A \end{vmatrix} = 0,$$

neboli

$$\det(\lambda^2 C + \lambda B + A) = 0.$$

5 PEP: Polynomiální zobecnění problému vlástních čísel

Posledním zobecněním je polynomiální problém vlastních čísel a jeho zobecněná varianta, která je nadmnožinou všech předchozích úloh vlastních čísel (EP, GEP, QEP a GQEP) o kterých jsme psali v kapitolách 2, 3 a 4.

5.1 Polynomiální problém vlastních čísel

Obdobně jako jsme EP zobecňovali na QEP, lze v podobném duchu pokračovat, čímž se dostaneme k maticové úloze, kterou definuje následující definice.

Definice (Polynomiální úloha vlastních čísel (PEP))**.** *Nechť $A_0, A_1 \dots, A_k$ jsou koplexní čtvercové matice řádu n. Pak polynomiální úlohou vlastních čísel (PEP) rozumíme nalezení $\lambda \in \mathbb{C}$ a nenulového vektoru $x \in \mathbb{C}^n$ splňující*

$$(\lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0)x = 0$$

resp. zobecněnou polynomiální úlohu vlastních čísel (GPEP) splňující

$$(\lambda^k A_k + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0)x = 0.$$

Skalár λ nazýváme vlastní číslo a nenulový vektor x nazýváme vlastní vektor.

Povšimněte si, že pokud $k = 1$ a matici A_0, pak dostáváme výraz $(\lambda I_n - A_0)x = 0$, což je EP. Pro matice A_0, A_1, pak dostáváme výraz $(\lambda A_1 - A_0)x = 0$, což je GEP. Pro $k = 2$ a matice A_0, A_1 dostáváme výraz $(\lambda^2 I_n + \lambda A_1 - A_0)x = 0$, což je QEP.

Polynomiální úlohu vlastních čísel budeme nadále značit PEP. V této práci se však budeme zabývat pouze PEP takovým, že podobně jako u QEP bude vedoucí člen monický tj. pro $A_0, A_1 \dots, A_{k-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ budeme uvažovat PEP jako úlohu

$$(\lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \cdots + \lambda A_1 + A_0)x = 0.$$

Nyní jen krátce poznamenejme, co rozumíme spektrem PEP.

Definice (Spektrum PEP)**.** *Nechť $A_1, ..., A_n$ jsou komplexní čtverové matice řádu n. Spektrem matic $A_1, \dots, A_n$ rozumíme množinu vlastních čísel PEP $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ Spektrum matic budeme značit* $\mathrm{sp}(A_1, \dots, A_n)$.

Vzhledem k PEP tj.

$$(\lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0)x = 0$$

platí, že

$$|\operatorname{sp}(A_1, \dots, A_n)| = k \cdot n.$$

5.2 Průvodní matice a charakteristický polynom PEP

Obdobně jako u předchozích problémů vlastních čísel i zde si definujeme charakteristický polynom a pro přehlednost zápisu i tkzv. λ-matici.

Definice (λ-matice, charakteristiký polynom)**.** *Nechť $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ jsou komplexní čtvercové matice řádu n, pak λ-maticí PEP rozumíme matici*

$$L(\lambda) = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0.$$

Charakteristickým polynomem PEP rozumíme

$$\chi_{I_n, A_{k-1}, \dots, A_1, A_0}(\lambda) = \det(L(\lambda)).$$

Poznamenejme, že charakteristická matice EP, je také λ-maticí PEP. O průvodní matici příslušné polynomu s komplexními koeficienty jsme se rozhovořili v sekci 2.3. Nyní si její obdobu uvedeme i pro polynomy s maticovými koeficienty.

Definice (Bloková průvodní matice)**.** *Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou komplexní čtvercové matice řádu n a $M(\lambda) = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0$, je maticový polynom. Blokovou průvodní maticí polynomu $M(\lambda)$ rozumíme matici*

$$P_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I_n & 0 & \dots & 0 & -A_1 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -A_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nk \times nk}$$

viz [4, str. 835]. Nyní provedeme analogickou větu o charakteristickém polynomu prvodní matice (věta 2.7) a O charakteristickém polynomu průvodní matice QEP (věta 4.1). Tuto větu lze nálezt například v literatuře [4, str. 835].

Věta 5.1 (O charakteristickém polynomu průvodní matice PEP)**.** *Nechť $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$ jsou komplexní čtvercové matice řádu n,$(\lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0)x = 0$ je PEP a P_M je průvodní matice polynomu $M(\lambda) = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0$. Potom*

$$\chi_{I_n, A_{k-1}, \dots, A_1, A_0}(\lambda) = \chi_{P_M}(\lambda).$$

Důkaz. Pokud $\lambda = 0$, pak

$$\chi_{I_n,A_{k-1},\dots,A_1,A_0}(0) = \det(A_0).$$

Dále

$$\chi_{P_M}(0) = P_M = \det(-P_M) =$$

Nyní přičteme -1 násobek 2 blokového řádku k 1-mu blovému řádku, následně -1 násobek 3 blokového řádku k 2 až -1 násobek n-tého blokového řádku k $n-1$ blokovému řádku.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & A_0 \\ -I_n & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & A_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Následně přičtem 1 blokový řádek k 2 až $n-1$ k 1 a následujícími úpravami dostávme

$$= \begin{vmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 & A_0 - A_1 \\ -I_n & I_n & \dots & 0 & A_1 - A_2 \\ 0 & -I_n & \dots & 0 & A_2 - A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I_n & A_{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 & A_0 - A_1 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & A_0 - A_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_0 - A_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_0 \end{vmatrix} = \det(A_0),$$

přičemž poslední rovnost plyne z věty o determinantu horní trojúhelníkové matice (věta 1.4) a tedy $\chi_{I_n,A_{k-1},\dots,A_1,A_0}(0) = \chi_{P_M}(0)$. Pokud $\lambda \neq 0$, pak

$$\chi_{P_M}(\lambda) = \det(\lambda I_n - P_M) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & 0 & \dots & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & -I_n & \lambda I_n & \dots & 0 & 0 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda I_n & 0 & A_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & \lambda I_n & A_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_n & A_{k-1} + \lambda I_n \end{vmatrix}.$$

První blokový řádek vynásobíme λ^{-1} a přičteme jej k druhému blokovéu řádku, čímž dostáváme

$$= \begin{vmatrix} \lambda I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_0 \\ 0 & \lambda I_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} A_0 + A_1 \\ 0 & -I_n & \lambda I_n & \dots & 0 & 0 & A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda I_n & 0 & A_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & \lambda I_n & A_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_n & A_{k-1} + \lambda I_n \end{vmatrix}.$$

Opakovaním tj. druhý blokový řádek vynásobíme λ^{-1} a přičteme jej k třetímu blokovéu řádku dostáváme

$$= \begin{vmatrix} \lambda I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_0 \\ 0 & \lambda I_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}A_0 + A_1 \\ 0 & 0 & \lambda I_n & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}A_0 + \frac{1}{\lambda}A_1 + A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda I_n & 0 & A_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_n & \lambda I_n & A_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_n & A_{k-1} + \lambda I_n \end{vmatrix}.$$

Opakovaním tohoto postupu tj. až po $n-1$ blokový řádek vynásobíme λ^{-1} a přičteme jej k n blokovéu řádku dostáváme

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A_0 \\ 0 & \lambda I_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}A_0 + A_1 \\ 0 & 0 & \lambda I_n & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2}A_0 + \frac{1}{\lambda}A_1 + A_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda I_n & 0 & \frac{1}{\lambda^{k-3}}A_0 + \frac{1}{\lambda^{k-2}}A_1 + \dots + \frac{1}{\lambda}A_{k-4} + A_{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda I_n & \frac{1}{\lambda^{k-2}}A_0 + \frac{1}{\lambda^{k-3}}A_1 + \dots + \frac{1}{\lambda}A_{k-3} + A_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^{k-1}}A_0 + \frac{1}{\lambda^{k-2}}A_1 + \dots + \frac{1}{\lambda}A_{k-2} + A_{k-1} + \lambda I_n \end{vmatrix}$$

Předchozí matice je bloková horní trojúhelníková proto z věty o determinantu horní trojúhelníkové (věta 1.4) platí, že

$$\det(\lambda I_n - P_M) = \left|\lambda^{k-1} I_n \cdot\right| \left| \frac{1}{\lambda^{k-1}}A_0 + \frac{1}{\lambda^{k-2}}A_1 + \dots + \frac{1}{\lambda}A_{k-2} + \lambda I_n + A_{k-1} \right| =$$

$$= \left| A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^{k-2}A_{k-2} + \lambda^{k-1}A_{k-1} + \lambda^k I_n \right|.$$

Odtud plyne tvrzení. □

5.3 Vlastní vektory PEP

Vlastní čísla jsme dokázali nalézt pomoví tkzv. průvodní matice. U QEP jsme pomocí blokové průvodní matice též dokázali nalézt vlastní vektory, nyní je zobecněným postupu pro QEP odvodíme vlastní vektory PEP. Nejprve opět nalezněme vlastní vektory y (jedná se o EP) průvodní matice

$$P_M,\ M = \lambda^k I_n + \lambda^{k-1} A_{k-1} + \dots + \lambda A_1 + A_0.$$

tj.

$$(\lambda I_{kn} - P_M)y = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I_n & \lambda I_n & \dots & 0 & -A_1 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -A_{k-1} + \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0.$$

Odtud roznásobením matice a vektoru s drobnými úpravami dostáváme následující vztahy

$$\begin{aligned} \lambda y_1 - A_0 y_n &= 0 \\ y_1 + \lambda y_2 - A_1 y_n &= 0 \\ y_2 + \lambda y_3 - A_2 y_n &= 0 \\ &\vdots \\ y_{n-1} + (\lambda I_n - A_{k-1}) y_n &= 0. \end{aligned}$$

Nyní vyjádřením y_1 s první rovnice a dosazení do druhé. Vyjádření y_2 z druhé rovnice a dosazení do třetí rovnice až vyjádřením y_{n-1} z $n-1$ rovnice a osazení do n-té rovnice dostáváme výraz

$$(I_n + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + A_1\lambda + A_0)y_n = 0.$$

Z toho vyplývá, že nalezením vlastních vektorů $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^{kn}$ blokové průvodní matice

$$P_M, \; M = \lambda^k I_n + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$$

je vektor $y_n \in \mathbb{C}^n$ vlastním vektorem PEP. Vzhledem k tomu, že matice P_M má $k \cdot n$ vlastních čísel včetně násobností, pak i v některých případech tj.

$$\operatorname{alg}(\lambda_i) = \operatorname{geo}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, k \cdot n\}.$$

Pak i PEP může mít kn vlastních čísel a tudíž nemusejí být v některých případech vlastní vektory PEP závislé.

5.4 Poznámka k GPEP

Ukázali jsme si, že obecný polynomiální problém vlastních čísel

$$(\lambda^k A_k + \lambda^{k-1} A_{k-1} \dots + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0)x = \left(\sum_{j=0}^{k} A_j \lambda^j \right) x = 0$$

umíme linearizovat na EP k-násobné dimenze, pokud $A_k = I_n$. Pokud je však vedoucí matice A_k regulární, odpovídající linearizace by vypadala takto

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & \cdots & 0_n & -A_k^{-1}A_0 \\ I_n & 0_n & \cdots & 0_n & -A_k^{-1}A_1 \\ 0_n & I_n & \cdots & 0_n & -A_k^{-1}A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & I_n & -A_k^{-1}A_{k-1} \end{pmatrix} y = \lambda y, \qquad y \neq 0.$$

Poznamenejme, že je-li A_k singulární lze provést obdobnou linearizaci, která však vede na *obrácený polosingulární zobecněný problém vlastních čísel* (sekce 3.5) k-násobné dimenze

$$\begin{pmatrix} 0_n & 0_n & \cdots & 0_n & -A_0 \\ I_n & 0_n & \cdots & 0_n & -A_1 \\ 0_n & I_n & \cdots & 0_n & -A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & I_n & -A_{k-1} \end{pmatrix} y = \lambda \begin{pmatrix} I_n & 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & \cdots & A_k \end{pmatrix} y, \qquad y \neq 0.$$

Nyní ukážeme, že tato úloha odpovídá úloze

$$\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n & \cdots & 0_n & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0_n & A_1 \\ 0_n & -I_n & \cdots & 0_n & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & -I_n & \lambda A_k + A_{k-1} \end{pmatrix} y = 0, \qquad y \neq 0.$$

Tedy matice na levé straně musí být singulární, tj.

$$\begin{vmatrix} \lambda I_n & 0_n & \cdots & 0_n & A_0 \\ -I_n & \lambda I_n & \cdots & 0_n & A_1 \\ 0_n & -I_n & \cdots & 0_n & A_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & \cdots & -I_n & \lambda A_k + A_{k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Postupnou eliminací všech bloků $-I_n$ pak dostaneme obdobně jako v sekci 5.2 (viz také sekci 4.4)

$$\det(\lambda^k A_k + \lambda^{k-1} A_{k-1} \cdots + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0) = 0.$$

Tabulka 5.1: Jednotlivé varianty polynomiálního problému vlastních čísel.

#	Typ problému	λ-matice
1.	Klasický problém (EP)	$P(\lambda) = \lambda I_n - A$
2.	Zobecněný problém (GEP)	$P(\lambda) = \lambda B - A,\ B \neq 0_n$
		$P(\lambda) = \lambda^2 C + \lambda B + A$
3.	Kvadratický problém (QEP)	$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \lvert C\rvert \neq 0$
4.	Zobecněný kvadratický pb. (GQEP)	$A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n},\ C \neq 0_n$
		$P(\lambda) = \lambda^k A_k + \cdots + \lambda A_1 + A_0$
5.	Polynomiální problém (PEP)	$A_i \in \mathbb{C}^{n\times n},\ \lvert A_k\rvert \neq 0$
6.	Zobecněný polynomiální pb. (GPEP)	$A_i \in \mathbb{C}^{n\times n},\ A_k \neq 0_n$

6 Závěr

V této bakalářské práci jsme uvedli základní poznatky ohledně problému vlastních čísel a jeho několika druhů zobecnění (GEP, QEP, PEP), které by měli čtenáři pomoct jako úvod do probletiky těchto úloh.

U EP jsme popsali převod EP na charakteristický polynom a připomněli jeho neřešitelnost pro matice řádu $k, k \geq 5$, popsali jsme výpočet vlastních vektorů EP, průvodní matici a spektrum včetně jejich vlastností, rozkladů (Shurova, Jordanova, Spektrální) pomocí vlastních čísel.

Následně jsme EP zobecnili na GEP přidáním čtvercové matice na pravou stranu rovnice. Zabývali jsme se tím, jak se GEP „chová“, pokud obsahoval některé čtvercové matice se specifickými vlastnostmi. Tyto speciální případy GEP měli tu vlastnost, že šli jednoduchou úpravou převést na EP případně jeho opačnou variantu. Následně jsme se zabýváli obecný případem GEP, vlastními vektory a spektry těchto speciálních případů GEP.

V případě PEP (resp. QEP) jsme se již zabývali pouze převodem PEP (resp. QEP) na EP pomocí blokové průvodní matice, která splňovala vlastnosti průvodní matice pouze v rámci svých bloků. Zmínili jsme se o problému závislosti vlastních vektorů v přípapdě PEP (resp QEP).

Výstupem této práce bylo zejména přehled zobecněných problémů a popis jejich převodu na EP pokud byl možný. Dále roztřídění GEP na speciální případy a popis jejich úprav na EP včetně rozboru jejich spekter. Následujícím rozšířením této bakalářské práce by mohla být algoritmizace EP, GEP, QEP a PEP a hledaní jejich numerického řešení. Výstupem by, pak mohl bý rozbor těchto algoritmů včetně tvorby balíku obsahující tyto algoritmy v jednom z programovacích jazyků.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.

[2] M. Berhanu, *The Polynomial Eigenvalue Problem*, Manchester Institute for Mathematical Sciences [online], Dostupné z: http://eprints.maths.manchester.ac.uk/582/1/mberhanu05.pdf

[3] L. Bican, *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 9788020017079.

[4] J. E. Dennis, Jr., J. F. Traub a R. P. Weber, *The Algebraic Theory of Matrix Polynomials*, Siam Jornal Numerical Analysis, Volume. 13, Number 6 (1976), pp. 831–845. Dostupné z: https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0713065, https://doi.org/10.1137/0713065

[5] E. J. Duintjer Tebbens, I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš a P. Tichý, *Analýza metod pro maticové výpočty*: základní metody. Praha: Matfyzpress, 2012. ISBN 978-80-7378-201-6.

[6] V. Hájková, M. Johanis, O. John,F. K. Kalenda a M. Zelený, *Matematika*. 2., upr. vyd. Praha: Matfyzpress, 2012. ISBN 978-80-7378-193-4.

[7] V. Kořínek, *Základy algebry*. 2. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1956.

[8] D. S. Mackey, N. Mackey, Ch. Mehl a V. Mehrmann, *Structured polynomial eigenvalue problems: good vibrations from good linearizations*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Volume 28, Number 4 (2006), pp. 1029–1051. Dostupné z: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/050628362, https://doi.org/10.1137/050628362

[9] V. Mehrmann a D. Watkins, *Polynomial Eigenvalue Problems with Hamiltonian trucure,* Electronic Transactions on Numerical Analysis, Volume 13 (2002), pp. 106–118. Dostupné z: http://www.emis.de/journals/ETNA/vol.13.2002/pp106-118.dir/pp106-118.pdf

[10] G. Strang, *Introduction to linear algebra*. 3rd ed. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, c2003. ISBN 978-0961408893.

[11] D. Stanovský, *Základy algebry*. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-105-7.

[12] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongorra, A. Ruhe a H. van der Vorst, *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems* [online]. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, c2000 [cit. 2020-04-14]. ISBN 08-987-1471-0. Dostupné z: http://www.netlib.org/utk/people/JackDongarra/etemplates/book.html

[13] F. Tisseur a K. Meerberger, *The Quadratic Eigenvalue Problem*, SIAM Review, Volume 43, Number 2 (2001), pp. 235–286. Dostupné z: https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0036144500381988, https://doi.org/10.1137/S0036144500381988

[14] J. Tůma a L. Barto, *Lineární Algebra* [online]. 2019 [cit. 2020-04-15]. Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la6.pdf