Aplikovaná matematika (nmgr.) - **přijímací zkouška 2020**

Přijímací test z matematiky

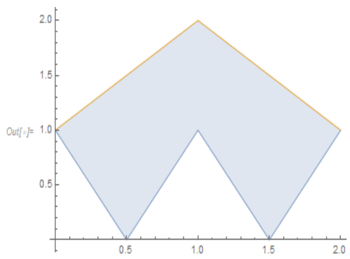
pro akademický rok 2020/21, navazující magisterský program Aplikovaná matematika

U všech níže uvedených příkladů uveďte celý postup řešení a výsledek řádně označte!

1. Kolikrát je třeba nejméně hodit hrací kostkou, aby pravděpodobnost toho, že číslo 1 padne alespoň jednou byla větší než pětinásobek pravděpodobnosti, že nepadne ani jednou?

Řešení: 1 nepadne ani jednou v n hodech: $\left({}^{5}\!/_{6}\right)^{n}$; 1 padne alespoň jednou v n hodech: $1-\left({}^{5}\!/_{6}\right)^{n}$

$1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n} > 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n} \quad \rightarrow n = 10;$



2. Vypočtěte plochu obrazce definovaného následujícími nerovnostmi

$$0 \le x \le 2;\ y \ge \big||2x-2|-1\big|;\ y \le 2-|x-1|.$$

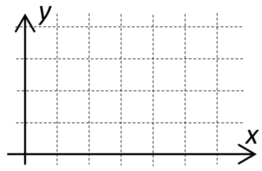
Obrazec znázorněte v kartézské soustavě, určete souřadnice vrcholů.

Řešení: souřadnice vrcholů: $[0;1]$, $\left[{}^{1}\!/_{2};0\right]$, $[1;1]$, $\left[{}^{3}\!/_{2};0\right]$, $[2;1]$, $[1;2]$

plocha = 2

3. V oboru reálných čísel určete extrémy (maximum, minimum) funkce $f(x) = {}^{x^3}\!\big/_{(1+x^4)}$.

Řešení: $f'(x) = {}^{x^2(3-x^4)}\!\big/_{(1+x^4)^2}$, tedy minimum $-{}^{\sqrt[4]{x^3}}\!/_{4}$ v bodě $-\sqrt[4]{3}$; maximum ${}^{\sqrt[4]{x^3}}\!/_{4}$ v bodě $\sqrt[4]{3}$



4. Uvažujte čtvercovou síť znázorněnou schématem na následujícím obrázku, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A:[x, y] → [x+1, y] (tj. o jeden krok na východ) nebo typu B: [x, y] → [x, y+1] (tj. o jeden krok severně). Spočtěte kolika různými způsoby se lze dostat z bodu o souřadnicích [3, 2] do bodu o souřadnicích [11, 8], jestliže projdete bodem [5, 5] nebo bodem [8,6].

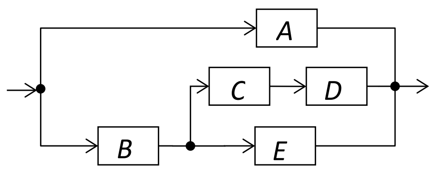
Řešení: $Vysl = N_{[5,5]} + N_{[8,6]} - N_{[5,5]\wedge[8,6]}$, kde

$N_{[5,5]}$ ... počet cest z [3, 2] do [11, 8] procházející [5, 5]; platí $N_{[5,5]} = P(2,3)\cdot P(6,3) = 10\cdot 84 = 840$

$N_{[8,6]}$ ... počet cest z [3, 2] do [11, 8] procházející [8, 6]; platí $N_{[8,6]} = P(5,4)\cdot P(3,2) = 126\cdot 10 = 1260$

$N_{[5,5]\to[8,6]}$ ... počet cest z [3, 2] do [11, 8] procházející [5, 5] a [8, 6] (tj. oběma body); platí $N_{[5,5]\to[8,6]} = P(2,3)\cdot P(3,1)\cdot P(3,2) = 10\cdot 4\cdot 10 = 400$

$Vysl = 840 + 1\,260 - 400 = 1\,700$



5. Uvažujte blokové schéma z následujícího obrázku. Označme x_A, x_B, x_C, x_D, x_E booleovské proměnné definující stavy bloků A, B, C, D, E, přičemž $x_\bullet = 1$, pokud blok • je v provozuschopném stavu a $x_\bullet = 0$, pokud je blok • v poruchovém stavu (• označuje jeden ze symbolů A, B, C, D, E). Poruchy bloků jsou nezávislé. Sestavte strukturní funkci zobrazeného systému, tj. booleovskou funkci $f(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$, která nabývá hodnoty 1, pokud je systém v provozuschopném stavu a hodnoty 0, pokud je systém v poruchovém stavu. Použijte pouze logické spojky + (nebo, or), • (a, and).

Řešení: $f(x_A, x_B, x_C, x_D, x_D) = x_A + \Big(x_B\cdot\big((x_C\cdot x_D) + x_E\big)\Big) = x_A + x_B\cdot x_C\cdot x_D + x_B\cdot x_E$

Přijímací test z matematiky

pro akademický rok 2019/20, navazující magisterský program Aplikovaná matematika

<u>U všech níže uvedených příkladů uveďte celý postup řešení a výsledek řádně označte</u>!

1. Uvažujte logickou formuli

$$\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow ((r \vee \neg p) \wedge \neg q),$$

kde p, q, r jsou logické proměnné (pravda, nepravda), $\neg$ označuje negaci, $\wedge$ označuje konjunkci (logická spojka a), $\vee$ označuje disjunkci (logická spojka nebo) a $\rightarrow$ označuje implikaci. a) Sestavte pravdivostní tabulku dané formule. b) Upravte logickou formuli

$$\neg\big((p \rightarrow \neg q) \vee \neg r\big)$$

tak, aby výsledný tvar obsahoval negace pouze jednotlivých logických proměnných.

<u>Řešení</u>: a)

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$r \vee \neg p$	$(r \vee \neg p) \wedge \neg q$	$výsl$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

; b) $\neg\big((p \rightarrow \neg q) \vee \neg r\big) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

2. Uvažujte náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$, kde $0 < \lambda$ je daná konstanta. a) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X. b) Spočtěte pravděpodobnost, že náhodná veličina X bude větší než ${}^{2}/_{\lambda}$, tj. $Pr\left({}^{2}/_{\lambda} < X\right)$.

<u>Řešení</u>: a) $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$; b) $Pr\left({}^{2}/_{\lambda} < X\right) = 1 - Pr\left(X \leq {}^{2}/_{\lambda}\right) = e^{-2} \cong 0{,}1353$

3. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic $2^{-4x} \cdot 4^{x^2} = 2^{8y}$, $x + 2y = 4$.

<u>Řešení</u>: $(x, y) \in \left\{\left(2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\right); \left(-2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\right)\right\}$

4. V rovině jsou dány následující body $A[3,9], B[7,3], C[14,12]$. a) Spočtěte obvod a plochu trojúhelníka ΔABC. b) Napište rovnici přímky procházející středem strany A, B a vrcholem C.

<u>Řešení</u>: a) $O_{ABC} = l_{AB} + l_{BC} + l_{CA} = 2\sqrt{13} + \sqrt{130} + \sqrt{130} \cong 30{,}0146$;

rovnoramenný Δ → $S_{ABC} = {}^{l_{AB} \cdot v_{AB}}/_{2} = \sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13} = 39$

b) $y - y_C = \frac{y_{S_{AB}} - y_C}{x_{S_{AB}} - x_C}(x - x_C) \xrightarrow{S_{AB}[5,6]} y - 12 = \frac{6-12}{5-14}(x - 14) \rightarrow 3y = 2x + 8 \rightarrow y = {}^{(2x+8)}/_{3}$

5. Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Definujte pojmy: a) nerostoucí posloupnost, b) shora omezená posloupnost, c) neomezená posloupnost. V definicích uvedených pojmů použijte kvantifikátory!

<u>Řešení</u>: a) $\forall n \in N \;\; a_n \geq a_{n+1}$ b) $\exists K \in R \; \forall n \in N \; a_n \leq K$ c) $\forall K \in R \; \exists n \in N \; |a_n| > K$