

Úlohy k přípravě na zkoušku z AN1

18. prosince 2024

Definitivní verze

- 1a Vypočtete kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y . Na základě spočítaných kořenů určete obor hodnot funkce f a rozhodněte, zda je prostá. Vysvětlete, jak jste ke svým závěrům došli.

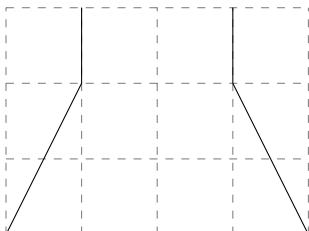
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

1b

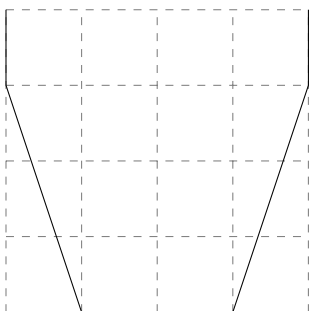
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x + 2}$$

- 2a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

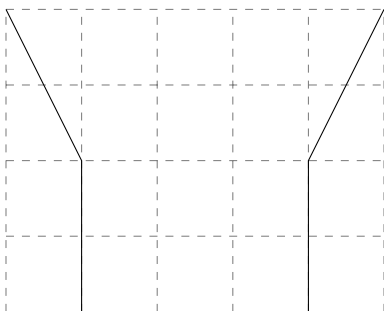
- (a) Definujte funkce S , V , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisí na výšce hladiny h .
- (b) Načrtněte graf funkce S .
- (c) Vypočtete derivaci V' . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?

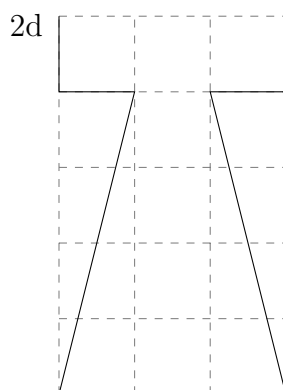


2b



2c





3a Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a . Tečnu zakreslete do soustavy souřadné.

$$f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{5 - x^2} \quad a = 2$$

3b

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad a = 3$$

4a Odvoďte z definice vzorec pro derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4b

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

4c

$$f(x) = x^5$$

4d

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

5a Pro každou ze zadaných posloupností zjistěte, zda je monotonní, určete druh monotonie a svůj závěr řádně zdůvodněte (dokažte, že je posloupnost monotonní). Dále určete supremum množiny členů posloupnosti a svůj závěr zdůvodněte (dokažte, že vámi určené číslo je supremem množiny).

$$\left\{ \frac{2n+3}{n+5} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{n+2}{3n+5} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

5b

$$\left\{ \frac{4n+7}{3n+5} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \left\{ \frac{2n+2}{3n+4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

5c

$$\left\{ \frac{2n+3}{n+5} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{2n+2}{3n+4} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

6a Vypočtete limitu posloupnosti. Jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

$$\lim \frac{(n^3 - n + 1)^2 - (2n + 1)^5 + 3n^6}{(n^2 + n + 2)^3}$$

6b

$$\lim \frac{(n^2 + 3)^3 + 2(n + 1)^6 + 3n^4}{(n + 1)(n + 2)^5}$$

6c

$$\lim \frac{(3n + n - 1)^2 + (2n + 1)^2 - 5(n - 1)^2}{(3n + 2)^2 + 5n^2}$$

7a Načrtněte graf funkce f . Napište definici spojitosti funkce f v bodě $a = 2$, tuto definici znegujte a ukažte, že funkce f této negaci vyhovuje. Tedy f není spojitá v bodě a .

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, 2] \\ 6 - x^2 & x \in (2, 3] \end{cases}$$

7b V bodě $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \in [-1, 1) \\ 2x + 1 & x \in [1, 2] \end{cases}$$

8a Zformulujte důsledek věty o kořeni spojitě funkce. S použitím tohoto důsledku řešte nerovnici

$$\sqrt{2x^2 - 7} \geq x - 1$$

8b

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 9} \leq 2x + 1$$

8c

$$\sqrt{4x - 7} \geq x - 1$$

9a–c Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešte nerovnice z úloh 8a–c.

10a Vypočtete jednostranné derivace funkce f v bodech $a \in \mathbb{R}$. Určete, v kterých bodech je funkce f diferencovatelná.

$$f(x) = |x^2 + x - 2|$$

10b

$$f(x) = |3x^2 + x^3|$$

- 11a Určete definiční obor funkce f a nalezněte intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = |x^2 - 2x - 3| - 2x$$

- 11b

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 2}$$

- 11c

$$f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$