

Zadání úlohy.

Konzerva na paštiku má tvar rotačního válce o daném objemu V . Dno a plášť jsou z plechu stejné kvality, víčko je ale z plechu, který je o 50 % dražší. Určete rozměry konzervy, pro které jsou náklady na materiál minimální.

Řešení úlohy.

Nechť má konzerva tvar rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou h . Objem válce je dán vztahem

$$V = \pi r^2 h.$$

Předpokládejme, že cena materiálu pro dno a plášť je k (např. Kč/cm²), zatímco víčko je z materiálu o 50 % dražším, tedy jeho cena za jednotku plochy je $1,5k$.

Plochy jednotlivých částí:

$$S_{\text{dno}} = \pi r^2, \quad S_{\text{víčko}} = \pi r^2, \quad S_{\text{plášť}} = 2\pi r h.$$

Celkové náklady na materiál jsou

$$C = k \cdot S_{\text{dno}} + k \cdot S_{\text{plášť}} + 1,5k \cdot S_{\text{víčko}}.$$

Po dosazení:

$$C = k \cdot \pi r^2 + k \cdot 2\pi r h + 1,5k \cdot \pi r^2 = k(\pi r^2 + 2\pi r h + 1,5\pi r^2) = k(2,5\pi r^2 + 2\pi r h).$$

Objemová podmínka je

$$V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Dosadíme do nákladové funkce:

$$C(r) = k \left(2,5\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} \right) = k \left(2,5\pi r^2 + \frac{2V}{r} \right).$$

Konstanta $k > 0$ neovlivňuje polohu minima, takže minimalizujeme funkci

$$f(r) = 2,5\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r > 0.$$

Spočítáme derivaci:

$$f'(r) = 2,5 \cdot 2\pi r - 2Vr^{-2} = 5\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Podmínka pro extrém:

$$f'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\pi r^3 = 2V.$$

Odtud

$$r^3 = \frac{2V}{5\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}.$$

Výšku h získáme z objemové podmínky:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Z rovnice $5\pi r^3 = 2V$ dostaneme

$$\frac{2V}{\pi r^2} = 5r.$$

Ale $\frac{V}{\pi r^2} = h$, tedy

$$2h = 5r \quad \Rightarrow \quad h = \frac{5}{2}r.$$

Ověření minima:

Druhá derivace:

$$f''(r) = 5\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

Pro všechna $r > 0$ je $f''(r) > 0$, funkce f je tedy konvexní a nalezený extrém je minimum.

Závěr:

Náklady na materiál jsou minimální, jestliže

$$r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}, \quad h = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}.$$

Poměr optimálních rozměrů je

$$\boxed{h : r = 5 : 2.}$$