

Úlohy k přípravě na zkoušku z AN1

4. prosince 2025

1a Řešte rovnici $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y .

Určete, pro jaké hodnoty $y \in \mathbb{R}$ má tato rovnice řešení a určete jejich počet.

Kořeny vypočtete (tj. vyjádřete pomocí y).

Na základě spočítaných kořenů určete obor hodnot funkce f a rozhodněte, zda je f prostá a zda je omezená. Vysvětlete, jak jste ke svým závěrům došli.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

1b

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 5}{x + 2}$$

1c

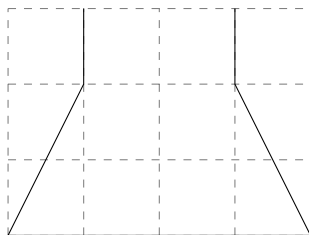
$$f(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5}$$

2a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce. Napište funkci, která popisuje poloměr hladiny $r(h)$ ve výšce h . Nakreslete graf této funkce.

Zkoumejte spojitost této funkce v bodě $a = 2$.

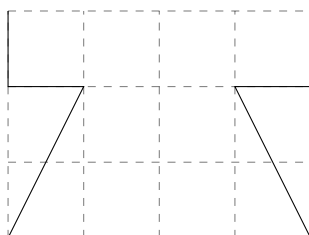
Pokud je funkce v bodě a spojitá, napište definici spojitosti a pro obecně zadané $\varepsilon > 0$ určete $\delta > 0$ vyhovující definici.

Pokud funkce není v bodě a spojitá, napište negaci definice spojitosti a zvolte konkrétní $\varepsilon > 0$ takové, že ke každému $\delta > 0$ existuje x vyhovující negaci definice. Toto x vyjádřete pomocí δ .



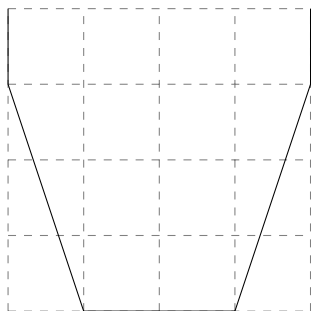
2b

$a = 2$



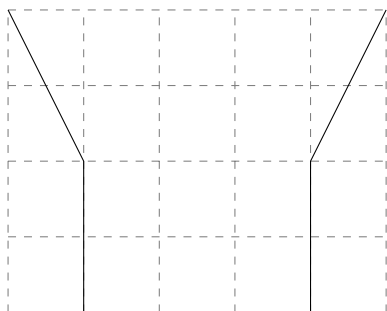
2c

$$a = 3$$



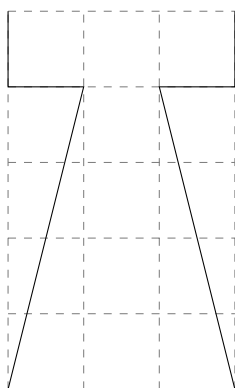
2d

$$a = 2$$



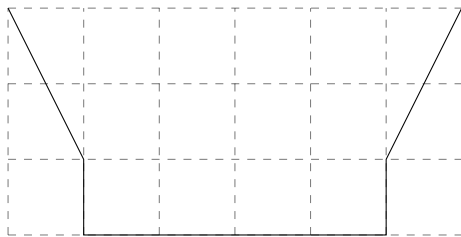
2e

$$a = 4$$



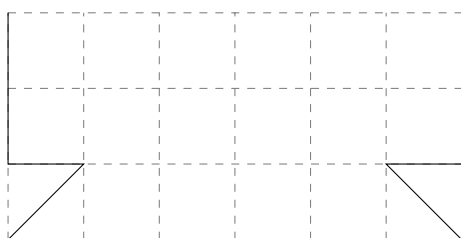
2f

$$a = 1$$



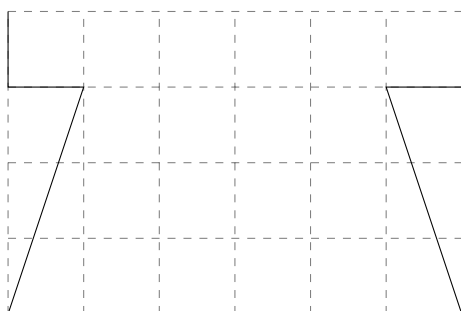
2g

$a = 1$



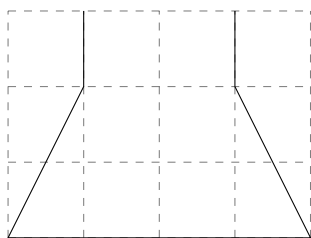
2h

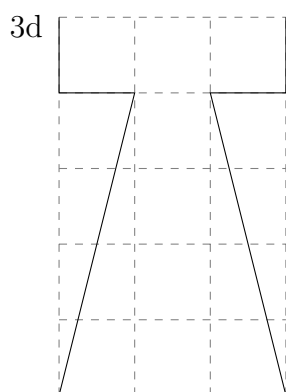
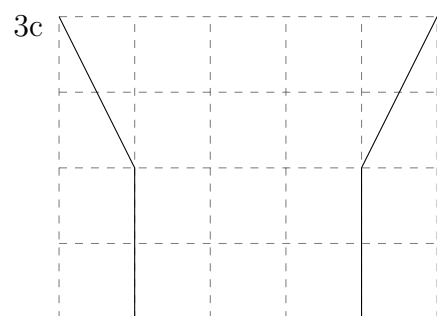
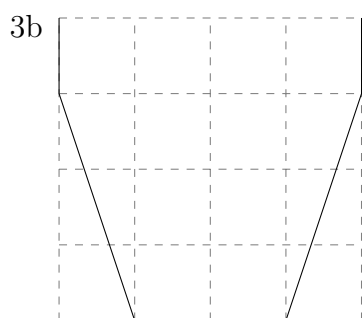
$a = 3$



3a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- Definujte funkce S , V , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h .
- Načrtněte graf funkce S .
- Vypočtete derivaci V' . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?





4a Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a . Tečnu zakreslete do soustavy souřadné.

$$f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{5 - x^2} \quad a = 2$$

4b

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad a = 3$$

5a Odvoďte z definice vzorec pro derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

5b

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

5c

$$f(x) = x^5$$

5d

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

6a Vypočtete limitu posloupností (a_n) , (b_n) . Jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

$$a_n = \frac{(n^3 - n + 1)^2 - (2n + 1)^5 + 3n^6}{(n^2 + n + 2)^3}, \quad b_n = \sqrt{|a_n|}$$

6b

$$a_n = \frac{(n^2 + 3)^3 + 2(n + 1)^6 + 3n^4}{(n + 1)(n + 2)^5}, \quad b_n = \sqrt{|a_n|}$$

6c

$$a_n = \frac{(3n - 1)^2 + (2n + 1)^2 - 5(n - 1)^2}{(3n + 2)^2 + 5n^2}, \quad b_n = \sqrt{|a_n|}$$

7a Zformulujte důsledek věty o kořeni spojitě funkce. S použitím tohoto důsledku řešte nerovnici

$$\sqrt{2x^2 - 7} \geq x - 1$$

7b

$$\sqrt{2x^2 + 4x + 9} \leq 2x + 1$$

7c

$$\sqrt{4x - 7} \geq x - 1$$

8a–c Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešte nerovnice z úloh 8a–c.

9a Určete definiční obor funkce f a nalezněte intervaly, na nichž je f rostoucí

$$f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 - 6x + 12}$$

9b

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 - 2x + 4}$$

9c

$$f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 3}}$$

9d

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$

- 10a Sud má tvar rotačního válce bez horní podstavy. Při daném objemu sudu určete poměr výšky a poloměru jeho podstavy tak, aby plocha materiálu potřebného na dno a plášť byla minimální. Výsledek znázorněte schematickým náčrtem sudu v nalezených proporcích.
- 10b Z kartonu má být vyrobena otevřená krabice (bez víka) ve tvaru kvádra o daném objemu V . Dno krabice má tvar obdélníku se stranami v poměru 3:4. Určete takový poměr rozměrů krabice (stran dna a výšky), aby plocha použitého kartonu na dno a stěny byla minimální.
- 10c Plechovka na nápoj má tvar rotačního válce o daném objemu V . Předpokládejte, že náklady na výrobu jsou přímo úměrné celkové ploše pláště a obou podstav plechovky a že materiál je všude stejně drahý. Určete takový poměr rozměrů plechovky (výšky a poloměru podstavy), pro který je tato plocha minimální. Výsledek znázorněte schematickým náčrtem plechovky v nalezených proporcích.
- 10d Válcový zásobník na vodu má daný objem V a je zateplen izolační vrstvou: plášť je izolován levnějším materiálem, obě podstavy dražším materiálem, který je třikrát dražší než materiál na plášť. Určete takový poměr rozměrů zásobníku (výšky a poloměru podstavy), aby byly celkové náklady na izolační materiál minimální. Výsledek schematicky znázorněte náčrtem válcového zásobníku v odpovídajících proporcích.
- 10e Plechová nádrž má tvar kvádra o daném objemu V . Dno nádrže má tvar obdélníku se stranami v poměru 3:2. Nádrž má víko i dno a všechny stěny jsou ze stejného plechu. Určete takový poměr rozměrů nádrže (stran dna a výšky), aby byla celková plocha povrchu, a tedy i spotřeba plechu, minimální.
- 10f Konzerva na paštiku má tvar rotačního válce o daném objemu V . Dno a plášť jsou z plechu stejné kvality, víčko je ale z plechu, který je o 50 % dražší. Určete rozměry konzervy, pro které jsou náklady na materiál minimální.
- 11a Rozložte výrazy na lineární kombinaci parciálních zlomků.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^3 - 5x^2 + 6x}, \quad \frac{x^2 - x - 12}{x^3 + 6x}$$

11b

$$\frac{x^2 + 12}{x^3 - x^2 - 2x}, \quad \frac{x^2 + 12}{x^3 + x},$$