

## Úlohy z matematické analýzy na cvičení 5. listopadu 2025

1. Na množině reálných čísel je definované uspořádání  $<$ , které má vlastnosti

- (i) Pro každou dvojici reálných čísel  $x, y$  platí právě jeden ze vztahů  $x = y, x < y, y < x$ .
- (ii) Platí-li pro reálná čísla  $x, y, z$  vztahy  $x < y, y < z$ , pak platí i  $x < z$ .

Ukažte, že pro  $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$  ze vztahů

$$a < b, \quad b < c, \quad c < d, \quad d < e$$

plyne platnost vztahu

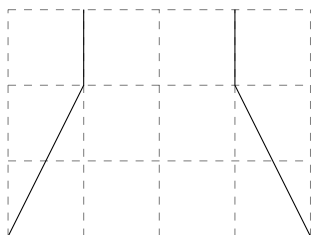
$$a < e$$

2a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce. Napište funkci, která popisuje poloměr hladiny  $r(h)$  ve výšce  $h$ . Nakreslete graf této funkce.

Zkoumejte spojitost této funkce v bodě  $a = 2$ .

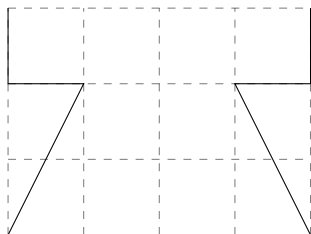
Pokud je funkce v bodě  $a$  spojitá, napište definici spojitosti a pro obecně zadané  $\varepsilon > 0$  určete  $\delta > 0$  vyhovující definici.

Pokud funkce není v bodě  $a$  spojitá, napište negaci definice spojitosti a zvolte konkrétní  $\varepsilon > 0$  takové, že ke každému  $\delta > 0$  existuje  $x$  vyhovující negaci definice. Toto  $x$  vyjádřete pomocí  $\delta$ .



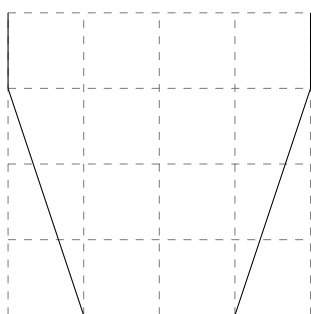
2b

$$a = 2$$



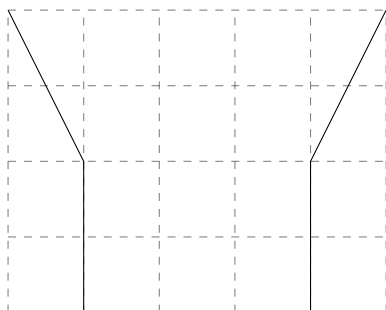
2c

$$a = 3$$



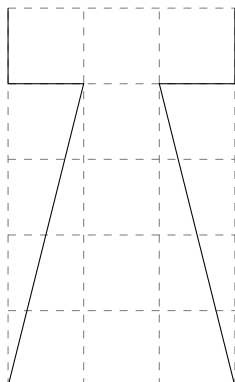
2d

$$a = 2$$



2e

$$a = 4$$



- 3a Určete definiční obor funkce  $f$  a vypočtěte její kořeny. Definiční obor rozdělte na intervaly, které neobsahují kořen a napište tyto intervaly.

Nalezené intervaly použijte na vyřešení nerovnice  $f(x) > 0$ .

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4x + 9} - (2x + 1)$$

3b

$$f(x) = \sqrt{4x - 7} - (x - 1)$$

3c

$$f(x) = \sqrt{2x + 7} - (x + 2)$$

4. Pro posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  a  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  platí

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Dokažte, že pro  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

5. Pro čísla  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$  platí  $a_n < b_n$ . Ukažte, že platí

$$a_n < \frac{a_n + b_n}{2} < b_n$$