

Derivace a nutná podmínka lokálního extrému

12. prosince 2025

1 Značení

1. Symbolem $U_\delta(x_0)$ budeme značit interval

$$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Tento interval nazýváme δ -okolím bodu x_0 , nebo jen krátce okolím bodu x_0 .

2. Vztah $x \in U_\delta(x_0)$ budeme někdy psát ve tvaru $|x - x_0| < \delta$.
3. Podobně budeme vztah $f(x) \in U_\epsilon(L)$ někdy psát ve tvaru $|f(x) - L| < \epsilon$.

2 Derivace

Definice 2.1 (Derivace funkce v bodě). Nechť f je reálná funkce definovaná v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě x_0 derivaci, pokud existuje konečná limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě x_0 .

Definice 2.2 (Lokální extrém). Nechť f je reálná funkce a x_0 je bod jejího definičního oboru.

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální maximum*, existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{pro všechna } x \in U_\delta(x_0).$$

- Řekneme, že f má v bodě x_0 *lokální minimum*, existuje-li $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{pro všechna } x \in U_\delta(x_0).$$

Lokálního maximum a minimum společně nazýváme *lokální extrém*.

Věta 2.3 (Nutná podmínka lokálního extrému). *Nechť f má v bodě x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0)$. Potom platí*

$$f'(x_0) = 0.$$

Poznámka 2.4. Důkaz této věty zatím odložíme. Nejdříve uvedeme několik příkladů k ilustraci věty. Poté dokážeme několik pomocných tvrzení (geometrické lemma o přímce, lemma o kladné derivaci a poznámku o záporné derivaci). Teprve poté se k důkazu nutné podmínky lokálního extrému vrátíme.

Příklad 2.5 (Lokální extrémy a nulová derivace).

1. Funkce s nulovou derivací a lokálním minimem.

Uvažujme funkci

$$f(x) = x^2.$$

Její derivace je

$$f'(x) = 2x,$$

takže v bodě

$$\text{pro } x_0 = 0 \quad \text{platí} \quad f'(0) = 0.$$

Zároveň platí

$$f(x) = x^2 \geq 0 = f(0) \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

takže v libovolně malém okolí bodu $x_0 = 0$ jsou hodnoty $f(x)$ větší nebo rovny $f(0)$. Tím pádem má funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum a zároveň nulovou derivaci.

2. Funkce s nulovou derivací bez lokálního extrému.

Uvažujme funkci

$$f(x) = x^3.$$

Její derivace je

$$f'(x) = 3x^2,$$

takže

$$\text{pro } x_0 = 0 \quad \text{platí} \quad f'(0) = 0.$$

Podívejme se však na chování funkce v okolí bodu 0:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = x^3 > 0 = f(0),$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = x^3 < 0 = f(0).$$

V každém okolí bodu 0 tedy najdeme body, kde jsou hodnoty funkce větší než $f(0)$ (pro $x > 0$), i body, kde jsou menší než $f(0)$ (pro $x < 0$). Funkce f tedy nemá v bodě $x_0 = 0$ ani lokální maximum, ani lokální minimum.

Tento příklad ukazuje, že z podmínky $f'(x_0) = 0$ neplyne, že x_0 je lokálním extrémem (podmínka je pouze *nutná*, nikoli *postačující*).

3. Funkce s lokálním minimem bez derivace v x_0 .

Uvažujme funkci

$$f(x) = |x|.$$

Pro $x > 0$ je $f(x) = x$, pro $x < 0$ je $f(x) = -x$. Z toho plyne

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

V bodě $x_0 = 0$ zkusíme spočítat derivaci z definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Pro $x > 0$ dostáváme

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1,$$

zatímco pro $x < 0$ dostáváme

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

Jednostranné limity se tedy liší:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1,$$

takže limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ neexistuje a funkce f v bodě $x_0 = 0$ není diferencovatelná.

Na druhé straně máme

$$|x| \geq 0 = |0| \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

tedy v každém okolí bodu 0 je $f(0)$ nejmenší hodnotou funkce. Bod $x_0 = 0$ je tedy lokálním (dokonce globálním) minimem funkce f , přestože derivace v tomto bodě neexistuje.

Tento příklad ukazuje, že funkce může mít lokální extrém i v bodě, kde není diferencovatelná.

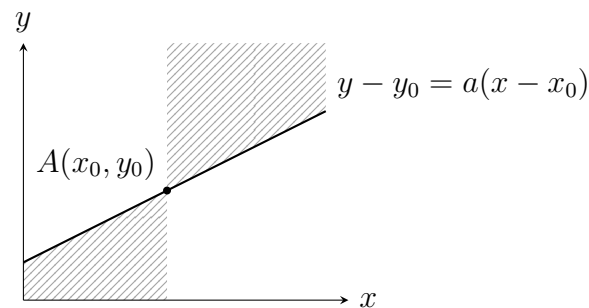
Úloha 2.6 (Geometrické vyjádření nerovnosti). Nechť $A = [x_0, y_0]$ je pevný bod v rovině, $a > 0$.

Nechť pro bod $B = [x, y]$ s $x \neq x_0$ platí:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} > a \tag{1}$$

Rozmyslete si, že pak bod B leží ve vyšrafované části obrázku 1 a platí

$$\begin{aligned} \text{pro } x > x_0 \quad \text{platí} \quad & y > y_0, \\ \text{pro } x < x_0 \quad \text{platí} \quad & y < y_0. \end{aligned}$$



Obrázek 1: Ilustrace nerovnosti (1)

Lemma 2.7 (Kladná derivace). *Nechť f je reálná funkce definovaná v okolí bodu x_0 a nechť existuje derivace $f'(x_0)$.*

Jestliže

$$f'(x_0) > 0,$$

pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > f(x_0),$$

a zároveň

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < f(x_0).$$

Jinými slovy: v dostatečně malém pravém okolí bodu x_0 je hodnota funkce větší než $f(x_0)$ a v levém okolí menší než $f(x_0)$.

Důkaz. Z definice derivace v bodě x_0 máme

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Označme $L = f'(x_0) > 0$. Definice limity říká, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \varepsilon.$$

Volíme konkrétně $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L \right| < \frac{L}{2}.$$

Z toho plyne

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0.$$

Nyní použijeme úlohu 2.6 s označením

$$y = f(x), \quad y_0 = f(x_0), \quad a = \frac{L}{2} > 0.$$

Z nerovnosti

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \frac{L}{2} = a$$

tedy dostáváme:

$$x > x_0 \implies y > y_0 \implies f(x) > f(x_0),$$

$$x < x_0 \implies y < y_0 \implies f(x) < f(x_0),$$

přičemž x je omezeno podmínkou $0 < |x - x_0| < \delta$. To je právě tvrzení lemmatu. $\square$

Poznámka 2.8 (Záporná derivace). Úplně analogicky lze dokázat následující tvrzení:

Jestliže $f'(x_0) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < f(x_0),$$

a zároveň

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > f(x_0).$$

Tedy při záporné derivaci se situace v levém a pravém okolí bodu x_0 obrací.

Důkaz věty o nutné podmínce lokálního extrému. Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje $f'(x_0)$.

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že $f'(x_0) \neq 0$. Nastávají tedy dvě možnosti:

1. Příklad: $f'(x_0) > 0$. Podle lemmatu o kladné derivaci existuje $\delta > 0$ takové, že

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) > f(x_0),$$

a

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) < f(x_0).$$

To však znamená, že v žádném okolí bodu x_0 není $f(x_0)$ ani největší, ani nejmenší hodnotou (vždy se najdou body s větší i menší hodnotou funkce), takže x_0 nemůže být bodem lokálního extrému. To je spor s předpokladem.

2. Příklad: $f'(x_0) < 0$. Použitím analogického tvrzení pro zápornou derivaci dostáváme, že v nějakém okolí bodu x_0 platí

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) < f(x_0),$$

a

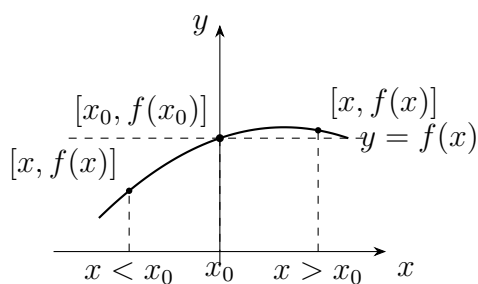
$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) > f(x_0),$$

a tedy opět x_0 nemůže být bodem lokálního extrému.

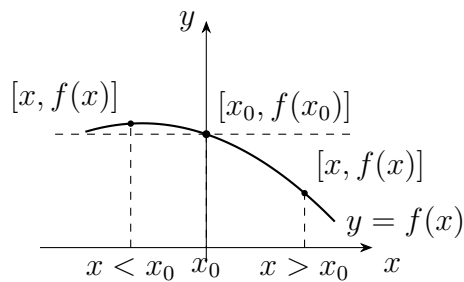
V obou případech docházíme ke sporu, takže náš předpoklad $f'(x_0) \neq 0$ je chybný. Zbývá jediná možnost:

$$f'(x_0) = 0.$$

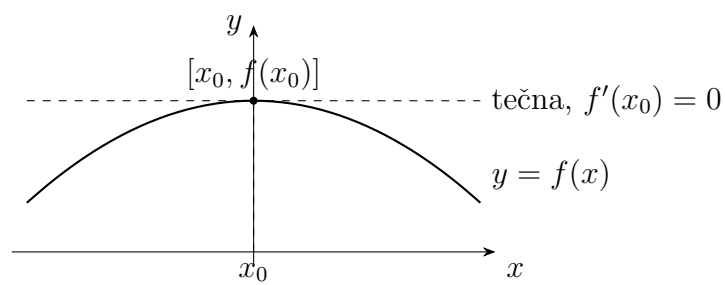
Tím je věta dokázána. □



Obrázek 2: Kladná derivace v bodě x_0 : vpravo od x_0 je $f(x) > f(x_0)$, vlevo od x_0 je $f(x) < f(x_0)$.



Obrázek 3: Záporná derivace v bodě x_0 : vpravo od x_0 je $f(x) < f(x_0)$, vlevo od x_0 je $f(x) > f(x_0)$.



Obrázek 4: Lokální maximum v bodě x_0 ; tečna v tomto bodě je vodorovná, tedy $f'(x_0) = 0$.