

Druhá derivace, extrémy, konvexita

1 Úvod: dvě zopakované věty

V této kapitole připomeneme dvě základní věty o derivacích: nutnou podmínku existence lokálního extrému a postačující podmínku pro monotonii funkce. Studenti je znají z jiného textu; zde je pouze stručně uvádíme, protože je budeme v následujících kapitolách aktivně používat.

Věta 1.1 (Nutná podmínka existence lokálního extrému). *Nechť je funkce f definovaná na intervalu I a nechť $x_0 \in I$ je vnitřní bod intervalu. Pokud má f v bodě x_0 lokální maximum nebo lokální minimum a je v x_0 diferencovatelná, pak*

$$f'(x_0) = 0.$$

Věta 1.2 (Postačující podmínka monotonie). *Nechť f je funkce definovaná na intervalu I .*

1. *Jestliže $f'(x) \geq 0$ pro všechna vnitřní $x \in I$, je f na I neklesající.*
2. *Jestliže $f'(x) > 0$ pro všechna vnitřní $x \in I$, je f na I rostoucí.*
3. *Jestliže $f'(x) \leq 0$ pro všechna vnitřní $x \in I$, je f na I nerostoucí.*
4. *Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna vnitřní $x \in I$, je f na I klesající.*

Shrnutí kapitoly

- Lokální extrém v diferencovatelném bodě může nastat jen tehdy, když je tam derivace nulová.
- Znaménko derivace na intervalu určuje monotonii funkce na tomto intervalu (neklesající / nerostoucí, rostoucí / klesající).

2 Druhá derivace a postačující podmínka existence extrému

V této kapitole se budeme zabývat *postačující* podmínkou existence extrému funkce na intervalu. Ukážeme, jak nám k tomu pomůže *druhá derivace*. Začneme proto její definicí a poté zformulujeme a dokážeme větu, která dává postačující podmínku pro minimum.

Definice 2.1. Nechť I je otevřený interval v $\mathbb{R}$. Řekneme, že funkce

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

je *dvakrát diferencovatelná na I* , jestliže platí:

1. f je diferencovatelná v každém bodě intervalu I , tj. existuje derivace $f'(x)$ pro všechna $x \in I$;
2. funkce f' je diferencovatelná v každém bodě intervalu I , tj. existuje derivace $f''(x)$ pro všechna $x \in I$.

Funkce $f'': I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *druhá derivace* funkce f na intervalu I .

Věta 2.2 (Postačující podmínka pro minimum pomocí druhé derivace). *Nechť $I = (a, b)$ je otevřený interval a funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na I . Předpokládejme, že*

1. $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I$,
2. $x_0 \in I$ a $f'(x_0) = 0$.

Pak funkce f nabývá v bodě x_0 minima na intervalu I , tj.

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Důkaz. Z podmínky $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I$ a z věty o postačující podmínce monotonie aplikované na funkci f' (její derivace je f'') plyne, že funkce f' je na I rostoucí.

Protože f' je rostoucí a $f'(x_0) = 0$, máme:

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0, \quad x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0.$$

Jinými slovy, na části intervalu I vlevo od x_0 je f' záporná, na části intervalu vpravo od x_0 je f' kladná.

Označme

$$I_- = I \cap (-\infty, x_0) = (a, x_0), \quad I_+ = I \cap (x_0, \infty) = (x_0, b).$$

Na intervalu I_- platí $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I_-$, a podle věty o postačující podmínce monotonie je tedy f na I_- klesající. Na intervalu I_+ platí $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I_+$, a proto je f na I_+ rostoucí.

Protože je f spojitá v bodě x_0 , je monotonní i na intervalech, ke kterým přidáme bod x_0 . Tedy f je klesající na intervalu $(a, x_0]$ a rostoucí na intervalu $[x_0, b)$.

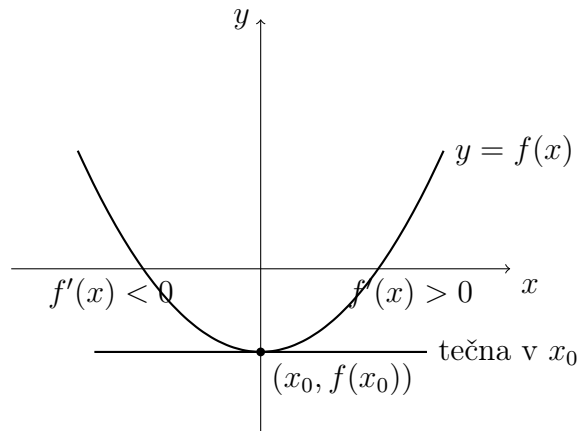
Odtud plyne

$$\begin{aligned} \text{pro } x < x_0 \quad &\text{je} \quad f(x) > f(x_0), \\ \text{pro } x > x_0 \quad &\text{je} \quad f(x) > f(x_0), \end{aligned}$$

Spojením obou tvrzení dostáváme

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

tedy f nabývá v bodě x_0 minima na I . □



Obrázek 1: Minimum funkce f v bodě x_0 při $f'' > 0$ a $f'(x_0) = 0$.

Shrnutí kapitoly

- Druhá derivace f'' je derivace derivace f' a popisuje „zakřivení“ grafu funkce.
- Je-li $f'' > 0$ na otevřeném intervalu a v bodě x_0 je $f'(x_0) = 0$, pak má f v x_0 minimum na tomto intervalu.
- Myšlenka důkazu: $f'' > 0$ znamená, že f' je rostoucí; proto je f' vlevo od x_0 záporná (funkce klesá) a vpravo od x_0 kladná (funkce roste).

3 Konvexita, tečny a druhá derivace

V této kapitole se budeme zabývat *konvexitou* funkce na intervalu a jejím vztahem k druhé derivaci. Nejprve ukážeme, že je-li $f'' > 0$, leží graf funkce nad každou tečnou. Poté využijeme tuto vlastnost k definici konvexní funkce pomocí tečny a odvodíme postačující podmínku $f'' > 0$ pro konvexitu.

Věta 3.1 (Graf leží nad tečnou). *Nechť I je otevřený interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na I . Nechť $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in I$ a $x_0 \in I$. Pak pro všechna $x \in I$ platí*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Graf funkce f tedy leží na intervalu I nad tečnou v bodě x_0 .

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Funkce g je dvakrát diferencovatelná a pro její druhou derivaci platí

$$g''(x) = f''(x) > 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Dále

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0), \quad \text{tedy} \quad g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Pomocná funkce g tedy splňuje předpoklady věty z předchozí kapitoly: $g'' > 0$ na I a $g'(x_0) = 0$. Podle této věty má g v bodě x_0 minimum na intervalu I , tedy

$$g(x) \geq g(x_0) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Spočítáme $g(x_0)$:

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0.$$

Dostáváme tedy

$$g(x) \geq 0,$$

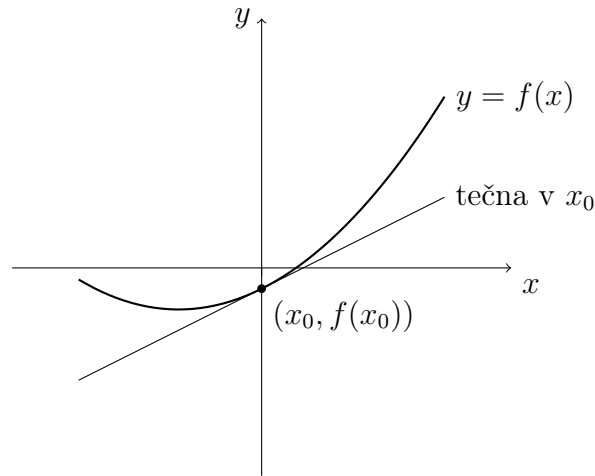
tj.

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0,$$

a tedy

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

pro všechna $x \in I$. To je právě tvrzení věty. □



Obrázek 2: Graf funkce f leží nad její tečnou v bodě x_0 při $f'' > 0$.

Definice 3.2 (Konvexita pomocí tečny). Nechť I je interval a $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná na I . Řekneme, že f je *konvexní na intervalu I* , jestliže pro každý bod $x_0 \in I$ platí

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Jinými slovy, graf funkce f na I leží nad každou tečnou ke grafu v libovolném bodě $x_0 \in I$.

Věta 3.3 (Postačující podmínka konvexity). Nechť $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na otevřeném intervalu I a nechť

$$f''(x) > 0 \quad \text{pro všechna } x \in I.$$

Pak je f konvexní na I (ve smyslu definice pomocí tečny).

Důkaz. Z předchozí věty víme, že z podmínky $f''(x) > 0$ na I plyne

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro všechna } x \in I$$

a pro každé $x_0 \in I$. To je přesně podmínka z definice konvexity pomocí tečny. □

Shrnutí kapitoly

- Je-li $f'' > 0$ na otevřeném intervalu, leží graf funkce nad každou tečnou ke grafu v tomto intervalu.
- Tuto vlastnost používáme jako definici konvexity pro diferencovatelné funkce: graf funkce leží nad každou svou tečnou.
- Druhá derivace s kladnou hodnotou na intervalu je postačující podmínkou konvexity (ve smyslu této definice).

4 Obecnější definice konvexní funkce

V této závěrečné kapitole stručně poznamenáme, že konvexitu lze definovat obecněji, bez předpokladu diferencovatelnosti. Používá se k tomu vlastnost grafu vzhledem k *sečnám*. Uvedeme obecnou definici a na příkladu funkce $|x|$ ukážeme, že i nediferencovatelná funkce může být konvexní. Nakonec vysvětlíme, proč jsme se v předchozí části omezili na definici pomocí tečny.

Definice 4.1 (Konvexita pomocí sečny). Nechť I je interval v $\mathbb{R}$. Funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je *konvexní na I* , jestliže pro všechna $x, y \in I$ a všechna $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Geometricky: graf funkce f leží mezi dvěma body grafu pod sečnou, která tyto body spojuje.

Věta 4.2. Funkce $f(x) = |x|$ je konvexní na $\mathbb{R}$ (ve smyslu definice pomocí sečny).

Důkaz. Chceme ukázat, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a všechna $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| \leq \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|.$$

Použijeme nerovnost trojúhelníku

$$|u + v| \leq |u| + |v| \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme $u = \lambda x$, $v = (1 - \lambda)y$. Potom

$$|\lambda x + (1 - \lambda)y| = |u + v| \leq |u| + |v| = |\lambda x| + |(1 - \lambda)y| = \lambda|x| + (1 - \lambda)|y|,$$

což je právě požadovaná nerovnost. □

Poznámka 4.3. Obecná definice konvexity pomocí sečny nevyžaduje existenci derivace. Umožňuje tedy studovat i funkce, které nejsou diferencovatelné v každém bodě (typickým příkladem je právě $f(x) = |x|$, která není diferencovatelná v bodě $x = 0$).

V předchozích kapitolách jsme se kvůli jednoduchosti omezili na *definici konvexity pomocí tečny* u diferencovatelných funkcí. Ta je dobře propojená s teorií derivací a umožňuje použít jednoduché kritérium

$$f''(x) > 0 \text{ na } I \Rightarrow f \text{ je konvexní na } I,$$

což výrazně usnadňuje práci při řešení úloh s konvexními funkcemi.

Shrnutí kapitoly

- Obecná definice konvexity používá sečny: mezi dvěma body grafu funkce leží graf pod sečnou spojující tyto body.
- Tato definice nevyžaduje diferencovatelnost, takže zahrnuje i funkce jako $f(x) = |x|$.
- V předchozích kapitolách jsme se záměrně omezili na definici pomocí tečny a druhou derivaci, abychom mohli využívat metody diferenciálního počtu a zjednodušit výklad.