

# Limita a monotonní funkce

12. prosince 2025

## 1 Limita a spojitost funkce

### 1.1 Definice limity

**Definice 1.1** (Limita funkce v bodě). *Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}$  je definiční obor funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Číslo  $L \in \mathbb{R}$  nazveme limitou funkce  $f$  v bodě  $x_0$  (vlastní limitou v bodě  $x_0$ ), jestliže*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

*Píšeme pak*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

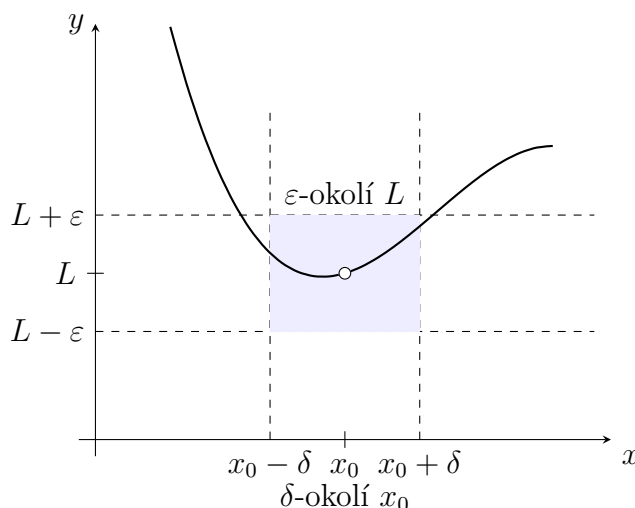
*Slovy: pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro každé  $x$ , které leží v prstencovém okolí bodu  $x_0$ , tj. v intervalu  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  bez bodu  $x_0$ , je hodnota  $f(x)$  v okolí čísla  $L$ , tj. v intervalu  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .*

**Poznámka 1.2.** *Aby funkce  $f$  mohla mít v bodě  $x_0$  limitu v uvedeném smyslu, musí být definována alespoň v nějakém prstencovém okolí bodu  $x_0$ , tj. musí existovat  $\delta_0 > 0$  tak, že*

$$(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \subseteq D.$$

*Jinak by v definici neexistovalo žádné  $\delta$  s  $f(x)$  pro  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ .*

**Poznámka 1.3** (Grafická interpretace). *Definici lze popsat takto: zvolíme libovolně úzký horizontální pruh kolem hodnoty  $L$ , tj. interval  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ . Definice říká, že potom můžeme najít dostatečně úzký vertikální pruh kolem*



Obrázek 1: Ilustrace definice limity: pro zvolené  $\varepsilon > 0$  jsme znázornili  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$  leží  $f(x)$  v intervalu  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

$x_0$ , tj. interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , takový, že všechny body grafu funkce s  $x$  z tohoto vertikálního pruhu (kromě možná bodu  $x_0$  samotného) leží uvnitř horizontálního pruhu. Při přibližování se po ose  $x$  k bodu  $x_0$  se tedy hodnoty  $f(x)$  „shlukují“ kolem  $L$ .

## 1.2 Jednostranné limity

**Definice 1.4** (Limita zprava). Necht'  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu zprava  $L$  a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x(x_0, x_0 + \delta) : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

**Definice 1.5** (Limita zleva). Necht'  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu zleva  $L$  a píšeme

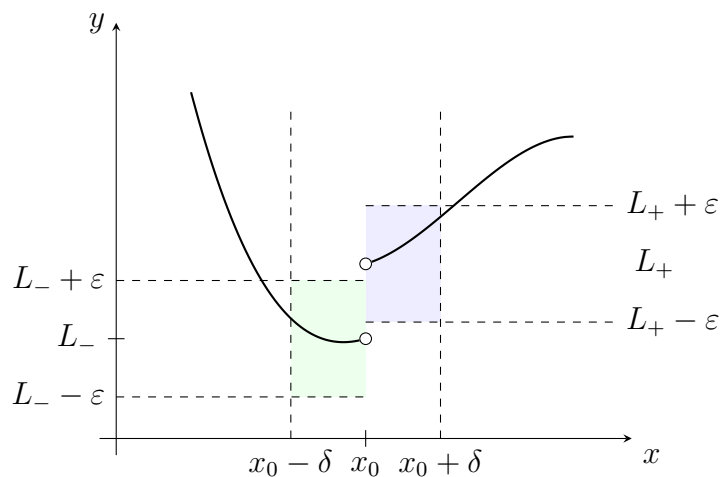
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x(x_0 - \delta, x_0) : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

**Věta 1.6** (Vztah oboustranné a jednostranných limit). *Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in \mathbb{R}$  je bod, v jehož prstencovém okolí je  $f$  definovaná. Pak pro reálné číslo  $L$  platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ a } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \right).$$



Obrázek 2: Ilustrace k jednostranným limitám: pro zvolené  $\varepsilon > 0$  jsme znázornili  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  leží  $f(x)$  v intervalu  $(L_- - \varepsilon, L_- + \varepsilon)$  a pro všechna  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  leží  $f(x)$  v intervalu  $(L_+ - \varepsilon, L_+ + \varepsilon)$ . Zde je  $L_-$  limitou funkce  $f$  zleva a  $L_+$  je limitou funkce  $f$  zprava.

### 1.3 Zobecnění definice limity, hromadné body definičního oboru

**Poznámka 1.7** (Hromadné body a zobecnění definic). *Bod  $x_0 \in \mathbb{R}$  nazveme hromadným bodem množiny  $D \subseteq \mathbb{R}$ , jestliže pro každé  $\delta > 0$  platí*

$$((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset.$$

*Analogicky mluvíme o hromadném bodě zprava, jestliže pro každé  $\delta > 0$  je*

$$(x_0, x_0 + \delta) \cap D \neq \emptyset,$$

a o hromadném bodě zleva, jestliže pro každé  $\delta > 0$  je

$$(x_0 - \delta, x_0) \cap D \neq \emptyset.$$

V definicích limity a jednostranných limit implicitně předpokládáme, že funkce  $f$  je definována v (oboustranném či jednostranném) prstencovém okolí bodu  $x_0$ .

Tento požadavek lze oslabit: místo toho stačí předpokládat, že  $x_0$  je příslušný (oboustranný, zprava, zleva) hromadný bod množiny  $D$ . Formálně to znamená, že se v definici limity místo podmínky

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

použije podmínka

$$\forall x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) : f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Jinými slovy, požadujeme, aby se do příslušného okolí hodnoty  $L$  dostaly všechny body grafu s  $x$  z prstencového okolí bodu  $x_0$ , pro něž je funkce  $f$  vůbec definována.

## 1.4 Spojitost a limita v bodě

**Věta 1.8** (Spojitost a limita). *Nechť  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ . Potom platí:*

*Funkce  $f$  je v bodě  $x_0$  spojitá právě tehdy, když existuje limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

*Důkaz.* Důkaz je přímým porovnáním definic.

Z definice spojitosti v bodě  $x_0$  víme, že  $f$  je spojitá v  $x_0$  právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon).$$

Porovnáme-li tuto definici s definicí limity funkce v bodě  $x_0$ , je zřejmé, že jde o stejný požadavek, jen v definici limity je hodnota  $L$  obecná, zatímco ve spojitosti bereme konkrétně  $L = f(x_0)$ . Proto platí ekvivalence znění věty.  $\square$

**Poznámka 1.9.** Analogické tvrzení platí i pro jednostranné limity a jednostrannou spojitost.

Například funkce  $f$  je spojitá zprava v bodě  $x_0$  právě tehdy, když existuje jednostranná limita zprava  $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Obdobně je  $f$  spojitá zleva v bodě  $x_0$  právě tehdy, když existuje jednostranná limita zleva  $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0).$$

## 1.5 Spojitost a omezenost

**Věta 1.10** (Lokální omezenost spojitě funkce). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  je funkce spojitá v bodě  $a$ . Potom existují čísla  $\delta > 0$  a  $M > 0$  taková, že*

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) : |f(x)| \leq M.$$

*Jinými slovy, funkce spojitá v bodě  $a$  je omezená na vhodném okolí bodu  $a$ .*

*Důkaz.* Zvolme  $\varepsilon = 1$ . Ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  plyne, že existuje  $\delta > 0$  takové, že pro všechna  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  platí

$$|f(x) - f(a)| < 1.$$

Tedy pro všechna taková  $x$  máme

$$f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1.$$

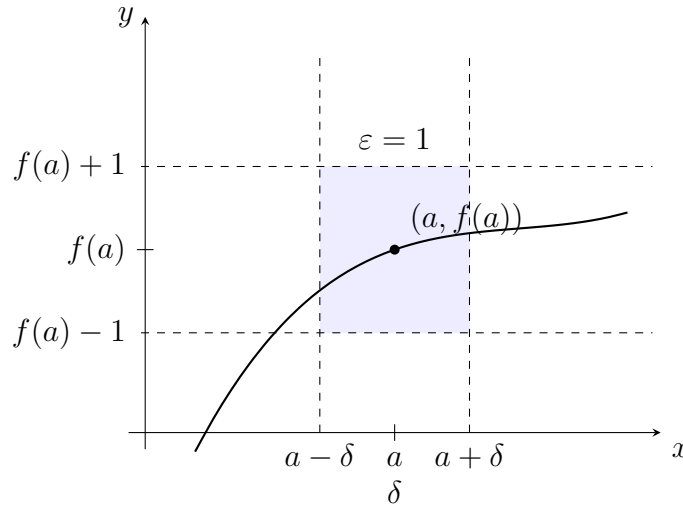
Odtud už dostáváme odhad

$$|f(x)| \leq |f(a)| + 1.$$

Položíme-li  $M := |f(a)| + 1$ , je tvrzení dokázáno. □

**Věta 1.11** (Lokální omezenost funkce spojitě zprava). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  je funkce spojitá v bodě  $a$  zprava. Potom existují čísla  $\delta > 0$  a  $M > 0$  taková, že*

$$\forall x \in [a, a + \delta) : |f(x)| \leq M.$$



Obrázek 3: Ilustrace důkazu lokální omezenosti: ze spojitosti v bodě  $a$  pro  $\varepsilon = 1$  existuje  $\delta > 0$  tak, že pro všechna  $x \in (a - \delta, a + \delta)$  leží  $f(x)$  v pásu mezi přímkami  $y = f(a) - 1$  a  $y = f(a) + 1$ .

Důkaz je analogický jako v předchozí větě, pouze pracujeme s jednostranným okolím bodu  $a$  zprava.

**Věta 1.12** (Lokální omezenost funkce spojitě zleva). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f$  je funkce spojitá v bodě  $a$  zleva. Potom existují čísla  $\delta > 0$  a  $M > 0$  taková, že*

$$\forall x \in (a - \delta, a] : |f(x)| \leq M.$$

Důkaz je opět analogický.

## 2 Supremum a infimum, úplnost reálných čísel

**Definice 2.1** (Horní závora, supremum). *Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ .*

- Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazveme horní závorou množiny  $A$ , jestliže

$$\forall a \in A : a \leq s.$$

- Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazveme supremem množiny  $A$  a píšeme  $s = \sup A$ , jestliže

1.  $s$  je horní závora  $A$ , tj.  $\forall a \in A : a \leq s$ ,
2.  $s$  je nejmenší horní závora, tj.

$$\forall s' < s \exists a \in A : a > s'.$$

**Poznámka 2.2.** *Ekvivalentně lze supremum charakterizovat takto:  $s = \sup A$  právě tehdy, když*

1.  $\forall a \in A : a \leq s$  (tj.  $s$  je horní závora),
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : s - \varepsilon < a \leq s$ .

**Definice 2.3** (Dolní závora, infimum). *Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ .*

- Číslo  $m \in \mathbb{R}$  nazveme dolní závorou množiny  $A$ , jestliže

$$\forall a \in A : m \leq a.$$

- Číslo  $m \in \mathbb{R}$  nazveme infimem množiny  $A$  a píšeme  $m = \inf A$ , jestliže

1.  $m$  je dolní závora  $A$ , tj.  $\forall a \in A : m \leq a$ ,
2.  $m$  je největší dolní závora, tj.

$$\forall m' > m \exists a \in A : a < m'.$$

**Poznámka 2.4.** *Ekvivalentně lze infimum charakterizovat takto:  $m = \inf A$  právě tehdy, když*

1.  $\forall a \in A : m \leq a$  (tj.  $m$  je dolní závora),
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : m \leq a < m + \varepsilon$ .

## 2.1 Vlastnost suprema reálných čísel

**Věta 2.5** (Vlastnost suprema, úplnost  $\mathbb{R}$ ). *Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , je shora omezená, tj. existuje  $M \in \mathbb{R}$  takové, že*

$$\forall a \in A : a \leq M.$$

*Pak existuje supremum  $\sup A \in \mathbb{R}$ .*

**Poznámka 2.6.** *Tato vlastnost (existence suprema každé neprázdné shora omezené podmnožiny reálných čísel) je jednou z možných formalizací úplnosti množiny reálných čísel a obvykle se bere jako axiom.*

## 2.2 Existence infima zdola omezené množiny

**Věta 2.7.** *Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ , je zdola omezená, tj. existuje  $m_0 \in \mathbb{R}$  takové, že*

$$\forall a \in A : m_0 \leq a.$$

*Pak existuje infimum  $\inf A \in \mathbb{R}$ .*

*Důkaz.* Definujme množinu

$$B := \{-a : a \in A\}.$$

Protože  $A$  je neprázdná, je neprázdná i  $B$ . Z nerovnosti  $m_0 \leq a$  pro  $a \in A$  plyne  $-a \leq -m_0$ , tedy každé  $b \in B$  splňuje  $b \leq -m_0$ . Množina  $B$  je tedy shora omezená.

Z vlastnosti suprema existuje  $s = \sup B \in \mathbb{R}$ . Položme

$$m := -s.$$

Ukážeme, že  $m = \inf A$ .

(i)  $m$  je dolní závora množiny  $A$ : Nechť  $a \in A$ . Pak  $-a \in B$  a z definice suprema máme  $-a \leq s$ . Tedy

$$-a \leq s \Rightarrow -s \leq a \Rightarrow m \leq a.$$

Platí tedy  $\forall a \in A : m \leq a$ .

(ii)  $m$  je největší dolní závora: Nechť  $m' > m$ . Chceme ukázat, že  $m'$  není dolní závora  $A$ , tj. existuje  $a \in A$  s  $a < m'$ .

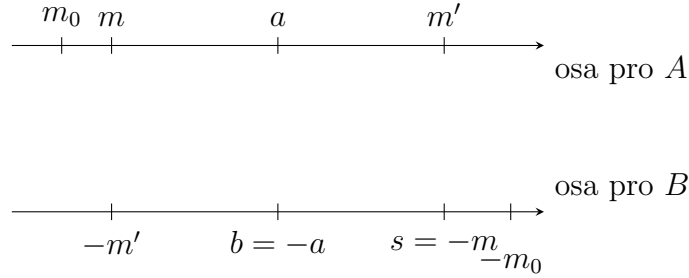
Z nerovnosti  $m' > m = -s$  dostáváme  $-m' < s$ . Protože  $s = \sup B$ , platí pro každé  $M < s$ , že existuje  $b \in B$  s  $b > M$ . Vezměme  $M = -m'$ . Potom existuje  $b \in B$  tak, že

$$b > -m'.$$

Existuje tedy  $a \in A$  s  $b = -a$  a dostáváme

$$-a = b > -m' \Rightarrow a < m'.$$

Takové  $a$  ukazuje, že  $m'$  není dolní závora. Z definice infima tedy  $m$  je největší dolní závora množiny  $A$ , tj.  $m = \inf A$ .  $\square$



Obrázek 4: Schématické znázornění uspořádání bodů na ose pro  $A$  (nahore) a na ose pro  $B = \{-a : a \in A\}$  (dole):  $m_0 \leq m < a < m'$  a tedy  $-m' < b = -a < s = -m \leq -m_0$ .

### 3 Existence vlastních jednostranných limit monotónní omezené funkce

Nyní dokážeme větu o existenci vlastních jednostranných limit monotónní funkce na otevřeném omezeném intervalu. Omezíme se na intervaly tvaru  $(a, b)$  s konečnými  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Věta 3.1.** *Nechť  $I = (a, b)$  je otevřený omezený interval a  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  je na  $I$  monotónní a omezená funkce, tj. existují  $m, M \in \mathbb{R}$  takové, že*

$$\forall x \in (a, b) : m \leq f(x) \leq M.$$

*Pak existují vlastní jednostranné limity*

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) \in \mathbb{R}.$$

*Důkaz.* Důkaz provedeme pro případ, kdy je funkce  $f$  rostoucí, tj.

$$\forall x, y \in (a, b), \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Případ klesající funkce je zcela analogický.

Označme obraz intervalu

$$S := f((a, b)) = \{f(x) : x \in (a, b)\}.$$

Z omezenosti  $f$  plyne, že množina  $S$  je neprázdná, zdola omezená (např. číslem  $m$ ) a shora omezená (např. číslem  $M$ ). Z existence suprema a infima tedy existují reálná čísla

$$L_a := \inf S \in \mathbb{R}, \quad L_b := \sup S \in \mathbb{R}.$$

Ukážeme, že

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L_a, \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = L_b.$$

### Limita zprava v bodě $a$

Chceme dokázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) \in (L_a - \varepsilon, L_a + \varepsilon).$$

Nechť  $\varepsilon > 0$  je dáno. Z definice infima  $L_a = \inf S$  existuje  $a_\varepsilon \in (a, b)$  takové, že

$$f(a_\varepsilon) < L_a + \varepsilon.$$

Protože  $f$  je rostoucí, platí pro všechna  $x \in (a, a_\varepsilon)$ :

$$x < a_\varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a_\varepsilon).$$

Zároveň  $L_a$  je dolní závora  $S$ , tedy

$$\forall x \in (a, b) : f(x) \geq L_a.$$

Pro každé  $x \in (a, a_\varepsilon)$  tedy

$$L_a \leq f(x) < f(a_\varepsilon) < L_a + \varepsilon.$$

Odtud

$$f(x) \in (L_a - \varepsilon, L_a + \varepsilon).$$

Položme  $\delta := a_\varepsilon - a > 0$ . Pak pro všechna  $x \in (a, a + \delta)$  platí  $f(x) \in (L_a - \varepsilon, L_a + \varepsilon)$ , tedy

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L_a \in \mathbb{R}.$$

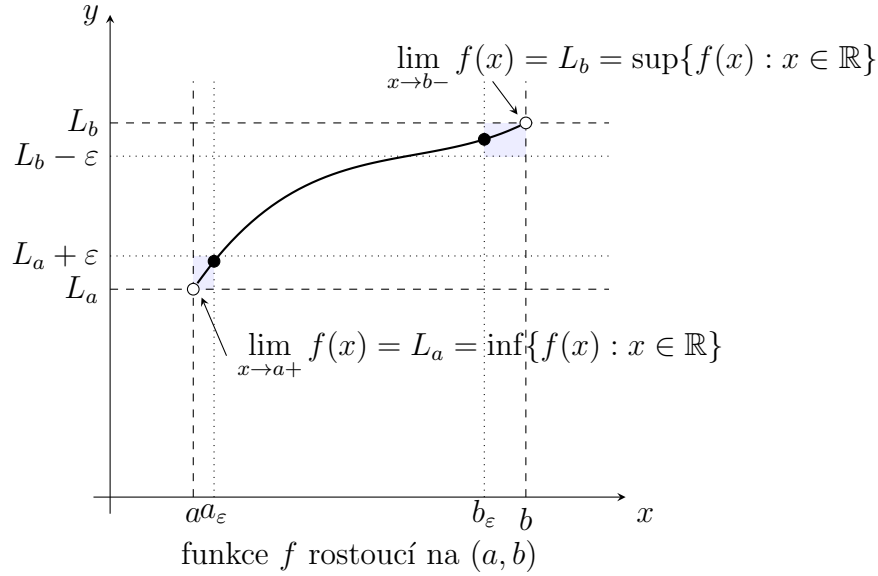
### Limita zleva v bodě $b$

Chceme dokázat, že

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (b - \delta, b) : f(x) \in (L_b - \varepsilon, L_b + \varepsilon).$$

Nechť  $\varepsilon > 0$  je dáno. Z definice suprema  $L_b = \sup S$  plyne, že pro číslo  $L_b - \varepsilon < L_b$  existuje prvek množiny  $S$ , tj. existuje  $b_\varepsilon \in (a, b)$  takové, že

$$L_b - \varepsilon < f(b_\varepsilon) \leq L_b.$$



Obrázek 5: Jednostranné limity monotónní rostoucí funkce na otevřeném omezeném intervalu  $(a, b)$ : existuje  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L_a$  a  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = L_b$ .

Protože  $f$  je rostoucí, platí pro všechna  $x \in (b_\varepsilon, b)$ :

$$b_\varepsilon < x \Rightarrow f(b_\varepsilon) < f(x).$$

Zároveň  $L_b$  je horní závora  $S$ , tedy

$$\forall x \in (a, b) : f(x) \leq L_b.$$

Pro každé  $x \in (b_\varepsilon, b)$  tedy

$$L_b - \varepsilon < f(b_\varepsilon) < f(x) \leq L_b < L_b + \varepsilon.$$

Odtud

$$f(x) \in (L_b - \varepsilon, L_b + \varepsilon).$$

Položme  $\delta := b - b_\varepsilon > 0$ . Pak pro všechna  $x \in (b - \delta, b)$  platí  $f(x) \in (L_b - \varepsilon, L_b + \varepsilon)$ , tedy

$$\lim_{x \rightarrow b-} f(x) = L_b \in \mathbb{R}.$$

## Případ klesající funkce

Jestliže je  $f$  místo toho *klesající*, tj.

$$\forall x, y \in (a, b), \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y),$$

dostaneme zcela obdobným postupem:

- $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  existuje a rovná se  $\sup S$ ,
- $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  existuje a rovná se  $\inf S$ ,

kde  $S = f((a, b))$ . Omezenost funkce  $f$  opět zajišťuje, že  $\sup S$  i  $\inf S$  jsou konečná reálná čísla.

Tím je důkaz věty dokončen.  $\square$

### 3.1 Monotonie funkce na uzavřeném intervalu

Použitím kritéria znaménka derivace dostaneme intervaly, na nichž je funkce rostoucí či klesající. Zpravidla se jedná o otevřené intervaly. Pokud je funkce navíc spojitá na uzavřeném intervalu  $I = [a, b]$ , je pak monotónní na tomto intervalu  $I$ .

V následující větě zformulujeme a dokážeme tvrzení pro zleva polouzavřený interval  $I = [a, b)$ .

Poté zformulujeme tvrzení pro zprava uzavřený interval a uzavřený interval. Důkazy těchto tvrzení jsou analogické a nebudeme je provádět.

**Věta 3.2** (Monotonie funkce na polouzavřeném intervalu.). *Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < b$ ,  $I = [a, b)$ ,  $I_0 = (a, b)$ . Nechť  $f$  je funkce monotónní (rostoucí nebo klesající) na intervalu  $I_0$  a spojitá v bodě  $a$  zprava.*

*Pak je  $f$  monotónní na celém intervalu  $I$ .*

*Důkaz.* Větu dokážeme pro případ, kdy je  $f$  na  $(a, b)$  rostoucí; důkaz v případě klesající funkce je obdobný.

Protože je  $f$  spojitá v bodě  $a$  zprava, je podle věty 1.10 pro vhodné  $\delta > 0$  omezená na intervalu  $[a, a + \delta)$ .

Z věty o existenci vlastních jednostranných limit monotónní omezené funkce tedy existuje reálné číslo

$$L_a := \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

---

<sup>1</sup> $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{/\infty, \infty\}$

a pro rostoucí funkci platí

$$L_a = \inf S$$

kde  $S$  je množina funkčních hodnot  $f(x)$  pro  $x \in (a, a + \delta)$ .

Ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  zprava a z věty o vztahu spojitosti a limity dostáváme

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L_a = \inf S$$

Z definice infima plyne, že pro všechna  $x \in (a, a + \delta)$  platí

$$f(a) = \inf S \leq f(x) \quad (1)$$

Nyní vezmeme libovolná  $x, y \in [a, b]$  s  $x < y$ , budeme uvažovat případy

1.  $a < x < y < b$ ,
2.  $x = a, y \in (a, a + \delta)$ ,
3.  $x = a, y \in [a + \delta, b]$

a rozeberme, proč ve všech případech platí  $f(x) < f(y)$ .

1. První případ plyne z monotonie  $f$  na  $(a, b)$ .
2. V druhém případě zvolíme  $z = (a + y)/2$ , pak je  $a < z < y$ . Ze vztahu (1) plyne  $f(a) \leq f(z)$  a z monotonie  $f$  plyne  $f(z) < f(y)$ . Odtud pak  $f(a) < f(y)$ .
3. Analogicky zdůvodníme případ tři volbou  $z = a + \delta/2$ .

Tedy  $f$  zachovává uspořádání na celém  $[a, b]$ , tj. je rostoucí na  $I$ . Případ klesající funkce se dokáže analogicky s využitím toho, že v tomto případě  $L_a = \sup S$ .  $\square$

**Věta 3.3** (Monotonie funkce na zprava polouzavřeném intervalu.). *Nechť  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $I = (a, b]$ ,  $I_0 = (a, b)$ . Nechť  $f$  je funkce monotonní (rostoucí nebo klesající) na intervalu  $I_0$  a spojitá v bodě  $b$  zleva.*

*Pak je  $f$  monotonní na celém intervalu  $I$ .*

**Věta 3.4** (Monotonie funkce na uzavřeném intervalu.). *Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $I = [a, b]$ ,  $I_0 = (a, b)$ . Nechť  $f$  je funkce monotonní (rostoucí nebo klesající) na intervalu  $I_0$  a spojitá v bodě  $a$  zprava a v bodě  $b$  zleva.*

*Pak je  $f$  monotonní na celém intervalu  $I$ .*