

Milí studenti¹,

při studiu limit posloupností narážíme na fundamentální otázku: Jak souvisí pojem konvergence (tedy "blížení se" k nějaké hodnotě) s uspořádáním, tedy s nerovnostmi? Ukazuje se, že tyto koncepty jsou těsně provázány. Následující věty tvoří základní aparát pro práci s nerovnostmi v kontextu limit.

Věty o limitách a nerovnostech

Zde si představíme a dokážeme dvě klíčové věty, které by měl každý budoucí učitel matematiky bezpečně ovládat.

Věta 1 (Zachování neostré nerovnosti v limitě). Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti, $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom platí $A \leq B$.

Důkaz. Tento důkaz se elegantně provede sporem.

1. Předpokládejme pro spor, že neplatí $A \leq B$, tedy že platí $A > B$.
2. Naším cílem je ukázat, že pokud $A > B$, musí existovat nějaké n , pro které je $a_n > b_n$, což je ve sporu s naším předpokladem ($a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$).
3. Označme rozdíl $A - B = d$. Z našeho sporného předpokladu $A > B$ plyne, že $d > 0$.
4. Zvolme $\varepsilon = \frac{d}{2}$. Jelikož $d > 0$, je i $\varepsilon > 0$.
5. Nyní aplikujeme definici limity na obě posloupnosti s tímto ε :
 - K ε existuje n_A takové, že pro $\forall n \geq n_A$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$, což znamená $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Důležitá je pro nás levá nerovnost: $a_n > A - \varepsilon$.
 - K ε existuje n_B takové, že pro $\forall n \geq n_B$ platí $|b_n - B| < \varepsilon$, což znamená $B - \varepsilon < b_n < B + \varepsilon$. Důležitá je pro nás pravá nerovnost: $b_n < B + \varepsilon$.
6. Vezměme $n^* = \max\{n_0, n_A, n_B\}$. Pro libovolné $n \geq n^*$ musí platit všechny tři podmínky (předpoklad věty i obě definice limit) současně.

¹Text vznikl s pomocí LLM Gemini

7. Pro $n \geq n^*$ tedy platí:

$$a_n > A - \varepsilon$$

$$b_n < B + \varepsilon$$

8. Podívejme se na vztah mezi $A - \varepsilon$ a $B + \varepsilon$. Dosadíme $\varepsilon = \frac{d}{2} = \frac{A-B}{2}$:

$$B + \varepsilon = B + \frac{A - B}{2} = \frac{2B + A - B}{2} = \frac{A + B}{2}$$

$$A - \varepsilon = A - \frac{A - B}{2} = \frac{2A - A + B}{2} = \frac{A + B}{2}$$

Vidíme, že $A - \varepsilon = B + \varepsilon$.

9. Pro $n \geq n^*$ tedy platí $a_n > A - \varepsilon$ a $b_n < B + \varepsilon$. Jelikož $A - \varepsilon = B + \varepsilon$, platí:

$$a_n > \frac{A + B}{2} > b_n$$

Z toho přímo plyne $a_n > b_n$.

10. To je ovšem spor s předpokladem věty, že $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

11. Náš původní předpoklad $A > B$ byl tedy chybný. Musí proto platit $A \leq B$.

□

Důležitá poznámka. Všimněte si, že věta mluví o **neostrých** nerovnostech. Pokud bychom měli $a_n < b_n$ (ostrá nerovnost), nemůžeme zaručit, že $A < B$. Limita může být $A = B$. Klasickým příkladem je $a_n = 0$ a $b_n = \frac{1}{n}$. Platí $a_n < b_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, ale $\lim a_n = 0$ a $\lim b_n = 0$. Tedy $A = B$.

Věta 2 (Věta o dvou policajtech (o sevření)). Necht' jsou dány tři posloupnosti (a_n) , (b_n) , (c_n) . Necht' platí:

1. $\lim a_n = L$ a $\lim b_n = L$ (kde $L \in \mathbb{R}$).

2. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.

Potom posloupnost (c_n) je konvergentní a platí $\lim c_n = L$.

Důkaz. Chceme dokázat, že $\lim c_n = L$. Musíme tedy pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ najít n^* takové, že pro $\forall n \geq n^*$ platí $|c_n - L| < \varepsilon$.

1. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$.
2. Z předpokladu $\lim a_n = L$ víme, že k tomuto ε existuje $n_A \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_A$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$, což je ekvivalentní $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.
3. Z předpokladu $\lim b_n = L$ víme, že k tomuto ε existuje $n_B \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_B$ platí $|b_n - L| < \varepsilon$, což je ekvivalentní $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$.
4. Z předpokladu věty víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.
5. Aby platily všechny tři podmínky naráz, musíme vzít n dostatečně velké. Zvolme $n^* = \max\{n_A, n_B, n_0\}$.
6. Nyní pro libovolné $n \geq n^*$ platí současně:
 - $L - \varepsilon < a_n$ (z konvergence a_n)
 - $a_n \leq c_n$ (z předpokladu sevření)
 - $c_n \leq b_n$ (z předpokladu sevření)
 - $b_n < L + \varepsilon$ (z konvergence b_n)
7. Spojením těchto nerovností dostáváme řetězec:

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \varepsilon$$
8. Z tohoto řetězce nás zajímá pouze vnější část týkající se c_n :

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$
9. Tato dvojitá nerovnost je ale ekvivalentní zápisu $|c_n - L| < \varepsilon$.
10. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ jsme našli n^* takové, že pro $\forall n \geq n^*$ platí $|c_n - L| < \varepsilon$. Tím jsme z definice dokázali, že $\lim c_n = L$.

□