

1. Definice rovnosti funkcí. Necht' $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce. Řekneme, že se funkce f , g rovnají a píšeme $f = g$, pokud platí

- (i) $D_f = D_g$
- (ii) $(\forall x \in D_f)(f(x) = g(x))$

2. Příklady.

1. Funkce $f(x) = 2 \log(x^2)$, $g(x) = \log(x^4)$ se rovnají.
2. Funkce $f(x) = 2 \log(x)$, $g(x) = \log(x^2)$ se nerovnají, protože mají různé definiční obory.
3. Funkce $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ se nerovnají. Nemají stejné funkční hodnoty pro $x < 0$.
4. Funkce $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$, $g(x) = 4x$ se rovnají.
5. Funkce $f(x) = \sin(x+1) + \sin(x-1)$, $g(x) = 2 \sin(x) \cos(1)$ se rovnají.

3. Definice kořenu funkce. Necht' $D \subseteq \mathbb{R}$ je množina, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Číslo $x \in D$ nazveme kořenem funkce f , pokud platí $f(x) = 0$.

4. Příklady.

1. Číslo $x = 2$ je kořenem funkcí $f(x) = \log(x-1)$, $g(x) = 4 - x^2$.
2. Číslo $x = 1/(5\pi)$ je kořenem funkce $f(x) = x \sin(1/x)$, číslo $x = 0$ není kořenem této funkce.

5. Definice aritmetických operací s funkcemi. Necht' $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, $c \in \mathbb{R}$.

Definujeme součet $f + g$, součin fg a podíl f/g funkcí f , g a násobek cf funkce f

$$\begin{aligned} f + g : x &\mapsto f(x) + g(x), & x &\in D_f \cap D_g \\ cf : x &\mapsto cf(x), & x &\in D_f \\ fg : x &\mapsto f(x)g(x), & x &\in D_f \cap D_g \\ f/g : x &\mapsto f(x)/g(x), & x &\in \{t \in D_f \cap D_g : g(t) \neq 0\} \end{aligned}$$

Rozdíl funkcí f , g definujeme pomocí součtu a násobku

$$f - g = f + (-1)g$$

6. Příklady. Necht' $f(x) = x + 1$, $g(x) = 1 - x$.

Pak $fg : x \mapsto 1 - x^2$, $f + 3g : x \mapsto -2x + 4$, $f - 2g : x \mapsto 3x - 1$.

Někdy používáme poněkud těžkopádný zápis

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= 1 - x^2, \\ (f + 3g)(x) &= -2x + 4, \\ (f - 2g)(x) &= 3x - 1.\end{aligned}$$

7. Definice polynomu. Necht' $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Výraz P v (1) nazýváme polynomem stupně n , píšeme $st(P) = n$, čísla a_n nazýváme koeficienty polynomu, výrazy $a_k x^k$ nazýváme členy polynomu.

$$P = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (1)$$

Výraz $P = 0$ nazýváme nulovým polynomem. Stupeň nulového polynomu nedefinujeme.¹

Funkci $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která číslu x přiřadí hodnotu výrazu P nazýváme též polynomem. Funkční hodnotu v tomto případě značíme $P(x)$. (Terminologie je tedy v tomto případě nejednoznačná. Zpravidla bude dáno kontextem, zda máme na mysli výraz nebo funkci, v opačném případě to uvedeme.)

8. Definice rovnosti polynomů. Necht' P, Q jsou polynomy a máme na mysli výrazy, nikoliv funkce.

$$\begin{aligned}P &= p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m = \sum_{k=0}^m p_k x^k \\ Q &= q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n = \sum_{k=0}^n q_k x^k\end{aligned}$$

Řekneme, že polynomy P, Q se rovnají a píšeme $P = Q$, pokud platí

- (i) Rovnají se jejich stupně: $st(P) = st(Q)$.
- (ii) Rovnají se koeficienty u stejných mocnin. Tedy pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq st(P)$ platí $p_k = q_k$.

9. Pozorování o rovnosti polynomů a nulovém polynomu. Necht' P, Q jsou polynomy. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní.

- (i) $P = Q$ ve smyslu rovnosti výrazů
- (ii) Rozdíl $P - Q$ je nulový polynom.

10. Rovnost výrazů a rovnost funkcí. Rozmyslete si, že z rovnosti polynomů $P = Q$ plyne rovnost funkcí $P : x \mapsto P(x)$, $Q : x \mapsto Q(x)$.

Níže v textu, v odstavci 30, ukážeme, že platí i opačná implikace. Tedy, že z rovnosti funkcí plyne rovnost výrazů. Příklady v odstavci 2 ukazují, že jiné funkce se mohou rovnat, přestože jejich výrazy nejsou totožné.

11. Příklady.

¹V některých kontextech se hodí definovat stupeň nulového polynomu rovný -1 . My to dělat nebudeme.

1. Necht' $a \in \mathbb{R}$, $P = x^2 + 2$, $Q = x^2 + ax + 2$, $R = x^2 + ax + 3$. Pak se polynomy P , Q rovnají pro $a = 0$ a pro $a \neq 0$ se nerovnají. Polynomy P , R se nerovnají pro žádnou hodnotu a .
2. Necht' $a, b \in \mathbb{R}$, $P = ax + b$, $Q = 3$. Pak se $P = Q$, právě když je $a = 0$, $b = 3$.

12. Úloha. Vynásobte a sečtěte polynomy $P = 2x^2 - 3x + 1$, $Q = x + 3$ způsobem, který znáte ze střední školy.

Zamyslete se, jak byste definovali součet a součin polynomů. Níže je, možná se vám bude zdát, že komplikovaně, napsaná definice těchto operací. Zamyslete se nad významem komplikací a případně navrhněte zjednodušení formulace.

13. Definice aritmetických operací s polynomy. Necht' $c \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Necht' P , Q jsou polynomy

$$P = p_0 + p_1x + \cdots + p_mx^m = \sum_{k=0}^m p_kx^k \quad (2)$$

$$Q = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n = \sum_{k=0}^n q_kx^k \quad (3)$$

Definujeme součty $P + Q$, $Q + P$, součin PQ a násobek cP

$$\begin{aligned} P + Q = Q + P &= \sum_{k=0}^m (p_k + q_k)x^k + \sum_{k=m+1}^n q_kx^k \\ PQ &= \sum_{k=0}^{nm} \left(\sum_{l=0}^k p_l q_{k-l} \right) x^k \\ cP &= cp_0 + cp_1x + \cdots + cp_mx^m = \sum_{k=0}^m cp_kx^k \end{aligned}$$

Rozdíl polynomů P , Q definujeme pomocí součtu a násobku

$$P - Q = P + (-1)Q$$

14. Úlohy.

1. Ukažte, že při násobení nenulových polynomů se jejich stupně sčítají, formálně zapsáno $st(PQ) = st(P) + st(Q)$.
2. Nalezněte polynomy P , Q takové, že

(a) $st(P + Q) = st(P)$

(b) $st(P + Q) = st(Q)$

(c) Neplatí ani (a), ani (b).

Jaký nejmenší a největší stupeň má polynom $P+Q$? Vyjádřete pomocí stupňů polynomů P, Q .

15. Úloha. V předchozí definici jsme vynechali dělení, protože výsledkem dělení polynomů nemusí být polynom.

V následujícím příkladu 16 ukazujeme, jak dělení polynomu se zbytkem vyjádříme pomocí násobení polynomů. Je to podobné jako s dělením celých čísel: Zvolte dvě čísla $a, b \in \mathbb{N}^+$, $a > b > 1$, vydělte a/b , celočíselný výsledek označte p a zbytek označte z . Ukažte, že platí

$$a = bp + z \quad (4)$$

Volbu a, b a výpočet opakujte, dokud vám nebude jasné, proč rovnost (4) platí vždy.

16. Příklad. $P = x^5 - x^3 + 3x - 2$ je polynom pátého stupně, $Q = x^2 - x - 3$ je polynom třetího stupně.

Vydělte polynomy P, Q

$$(x^5 - x^3 + 3x - 2) : (x^2 - x - 3)$$

Výsledek dělení označte R , zbytek označte S a ukažte, že platí

$$P = RQ + S$$

17. Věta o dělení polynomu polynomem se zbytkem. Nechť P, Q jsou polynomy stupně $n_P, n_Q \in \mathbb{N}_0$, $n_Q \leq n_P$.

Pak existuje polynom R stupně $n_R = n_P - n_Q$ a polynom S , který má stupeň $n_S < n_Q$ nebo je nulovým polynomem² takové, že pro polynomy P, Q, R, S platí rovnost

$$P = QR + S$$

18. Důkaz vynecháme. Dá se provést výpočtem koeficientů polynomů R, S tak aby se polynomy $P, QR+S$ rovnaly (máme na mysli rovnost výrazů, tedy rovnost koeficientů u odpovídajících mocnin). Více v následujících příkladech.

19. Příklady.

²Zde by se hodilo definovat stupeň nulového polynomu jako -1 . Formulace věty by pak byla kratší.

1. Necht' $P = 5x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 1$, $Q = x^2 + 2$.

Napište polynomy R , S stupňů n , m dle věty o dělení polynomu polynomem ve tvaru

$$\begin{aligned} R &= r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n \\ S &= s_0 + s_1x + \cdots + s_mx^m \end{aligned}$$

a napište rovnost polynomů (ve smyslu rovnosti výrazů) $P = QR + S$ ve tvaru soustavy rovnic pro koeficienty polynomů R , S .

Ukažte, že tato soustava má jednoznačné řešení aniž byste ji vyřešili.

2. Vyřešte předchozí úlohu pro obecně zadané $P = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_4 \neq 0$. $Q = x^2 + 2$ zvolte stejné.
3. Vyřešte předchozí úlohu (tj. úlohu 2) pro obecně zadané $Q = b_2x^2 + b_1x + b_0$, $b_2 \neq 0$. P zvolte stejné.

20. Věta o dělení polynomu kořenovým činitelem. Necht' P je polynom, x_0 je jeho kořen.

Pak existuje polynom R stupně $st(R) = st(P) - 1$ takový, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = (x - x_0)R(x)$$

21. Důkaz. $Q(x) = x - x_0$ je polynom prvního stupně. Proto dle věty o dělení polynomu polynomem existuje polynom R stupně $st(R) = st(P) - 1$ a číslo a takové, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = (x - x_0)R(x) + a$$

Dosazením $x = x_0$ dostaneme $P(x_0) = (x_0 - x_0)R(x_0) + a$. Protože je x_0 kořen polynomu P , platí $P(x_0) = 0$, tedy $a = 0$, a tedy

$$P(x) = (x - x_0)R(x)$$

22. Příklad. Ukažte, že $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ jsou kořeny polynomu $P = 4x^5 - 12x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 2x$. Pomocí postupného dělení kořenovým činitelem vypočtete další kořeny polynomu P .

23. Věta o počtu kořenů polynomu. Necht' $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, polynom P je zadaný vztahem

$$P(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

Pak má P nejvýše n různých reálných kořenů.

24. Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. Nechť $n = 1$. Předpokládáme $a_1 \neq 0$, proto má polynom $P(x) = a_1x + a_0$ právě jeden kořen (podrobnosti necháme na čtenáři).
2. Nechť $N \in \mathbb{N}^+$ a předpokládejme, že polynomy stupně $n \leq N$ mají nejvýše n kořenů.

Nechť je P polynom stupně $N + 1$. Pokud nemá žádný reálný kořen, je tvrzení věty pro P dokázané.

Nechť má P alespoň jeden reálný kořen, označme ho x_0 . Z věty o dělení polynomu kořenovým činitelem plyne existence polynomu R stupně N takového, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$P(x) = R(x)(x - x_0) \quad (5)$$

Z indukčního předpokladu plyne, že polynom R má nejvýše N kořenů. Z (5) pak plyne, že P má nejvýše $N + 1$ kořenů.

Dokázali jsme tvrzení věty pro polynomy stupně jedna i indukční krok, proto tvrzení platí pro všechna $n \in \mathbb{N}^+$.

25. Lemma o nenulovém polynomu. Nechť P je polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$. Pak má P konečně mnoho navzájem různých kořenů.

26. Důkaz je jednoduchým důsledkem věty o počtu kořenů polynomu. Podrobnosti necháme na čtenáři.

27. Lemma o nulovém polynomu. Nechť P je polynom, který má nekonečně mnoho navzájem různých kořenů.

Pak je P nulový polynom.

28. Poznámka o nepřímém důkazu a obměněné implikaci. Nechť A , B jsou výroky. Rozmyslete si, že výrok

$$A \Rightarrow B \quad (6)$$

je ekvivalentní s výrokem

$$\neg B \Rightarrow \neg A \quad (7)$$

Implikaci (7) nazýváme obměněnou implikací implikace (6).

Při důkazu tvrzení formulovaného jako implikace (6) můžeme dokazovat buď implikaci (6) a takový důkaz nazýváme *přímým důkazem*, nebo dokazujeme implikaci (7) a takový důkaz nazýváme *nepřímým důkazem*.

29. Důkaz lemmatu o nulovém polynomu provedeme nepřímo. Tvrzení zapíšeme pomocí implikace (6), kde

Výrok A : Polynom P má nekonečně mnoho navzájem různých kořenů.

Výrok B : P je nulový polynom.

Pravdivost obměněné implikace (7) plyne z lemmatu 25 o nenulovém polynomu.

30. Lemma o rovnosti polynomů. Necht P, Q jsou polynomy stupňů n, m

$$P = p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n \quad (8)$$

$$Q = q_0 + q_1x + \cdots + q_mx^m \quad (9)$$

Necht se rovnají funkce $P : x \mapsto P(x), Q : x \mapsto Q(x)$.

Pak se rovnají polynomy jako výrazy, tj platí $n = m$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$ platí $p_k = q_k$.

31. Důkaz. Rozdíl polynomů $R = P - Q$ je polynom. Pokud se polynomy P, Q rovnají ve smyslu rovnosti funkcí, jsou všechna $x \in \mathbb{R}$ kořeny polynomu R . Proto má polynom R nekonečně mnoho kořenů a odtud a z lemmatu o nulovém polynomu plyne, že R je nulový polynom.

Tvrzení věty pak plyne z pozorování v 9.

32. Úlohy.

1. Nalezněte všechny trojice čísel $A, B, C \in \mathbb{R}$, pro které se rovnají funkce $f = g$. Svůj postup zdůvodněte.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 13x + 5 \\ g(x) &= (A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + 2A - 3C \end{aligned}$$

2. Nalezněte $A, B, C \in \mathbb{R}$ pro která se rovnají funkce $f = g$. Svůj postup zdůvodněte.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2 - 13x + 5}{(x - 3)(x^2 - 2x + 2)} \\ g(x) &= \frac{A}{x - 3} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2} \end{aligned}$$

33. Poznámka. Zlomky v definici funkce g v úloze 32.2 nazýváme parciálními zlomky.

34. Metoda výpočtu koeficientů dosazováním. Naším cílem je nalézt trojici čísel $A, B, C \in \mathbb{R}$ pro která se rovnají funkce $f = g$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 4x - 1 \\ g(x) &= A(x - 2)(x + 3) + B(x - 2)(x + 1) + C(x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Jeden z postupů je následující: do rovnice $f(x) = g(x)$ dosadíme kořeny výrazů $x = 2, x = -3, x = -1$ a spočítáme A, B, C .

V následující úloze ukážete, že je tento postup korektní.

35. Úloha.

Necht $n \in \mathbb{N}$ a P, Q jsou polynomy stupně nejvýše n .

Dokažte, že (i) je ekvivalentní (ii).

(i) Existují navzájem různá čísla $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n+1\})(P(x_i) = Q(x_i))$$

(ii)

$$(\forall x \in \mathbb{R})(P(x) = Q(x))$$