

Úvod do posloupností

Vítejte u studia matematické analýzy. Jedním z prvních a klíčových konceptů, se kterými se setkáte, jsou **posloupnosti**. Představují základ pro pochopení limit, řad a funkcí. Posloupnost si můžete intuitivně představit jako nekonečný, uspořádaný seznam čísel.

1. Definice posloupnosti

Formálně řečeno, **posloupnost reálných čísel** je zobrazení (funkce) z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ je tedy přiřazeno právě jedno reálné číslo $a_n \in \mathbb{R}$. Toto číslo a_n nazýváme **n-tý člen posloupnosti**.

Posloupnost obvykle značíme jedním z následujících způsobů:

- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
- Jednoduše (a_n)
- Výčtem několika prvních členů: $a_1, a_2, a_3, \dots$

Příklad: Posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ představuje seznam čísel: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

2. Konvergentní posloupnost

Konvergence je centrálním pojmem analýzy a popisuje chování posloupnosti pro n blížíící se nekonečnu. Intuitivně, posloupnost konverguje, pokud se její členy neomezeně přibližují k nějaké konkrétní hodnotě – **limitě**.

Definice (Limita posloupnosti):

Řekneme, že posloupnost (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé libovolně malé $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí nerovnost $|a_n - A| < \varepsilon$.

Zapisujeme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Posloupnost, která má konečnou limitu (tj. $A \in \mathbb{R}$), se nazývá **konvergentní**.

Tato definice říká, že ať si zvolíme jakkoliv úzký pás o šířce 2ε kolem hodnoty A , od určitého indexu n_0 se již všechny následující členy posloupnosti budou nacházet uvnitř tohoto pásu (na přednášce nakreslíme obrázek).

Příklad 1: Ukážeme, že posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní** a její limita je 0:

Nechť $\varepsilon > 0$, zjistíme, pro která $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

Po dosazení dostaneme nerovnici

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

která má řešení

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ označíme symbolem $\lceil x \rceil$ zaokrouhlení čísla x na nejbližší celé číslo větší než x . Zvolíme $n_0 := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, pak pro $n > n_0$ platí $n > 1/\varepsilon$, a tedy $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Příklad 2: Ukážeme, že konstantní posloupnost $(a)_{n=1}^\infty$ je **konvergentní** a její limita je a :

Nechť $\varepsilon > 0$, pak $|a_n - a| < \varepsilon$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy zvolit například $n_0 = 1$.

Věta o aritmetice limit

Pro výpočty limit je klíčová následující věta. Nechť (a_n) a (b_n) jsou konvergentní posloupnosti takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Potom platí:

1. **Limita součtu/rozdílu:** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$
2. **Limita součinu:** $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. **Limita podílu:** Pokud navíc $B \neq 0$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n \neq 0$, pak platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

Tato věta nám umožňuje rozkládat složitější posloupnosti na jednodušší části a počítat jejich limity samostatně.

Hlavní myšlenky důkazu

Důkaz věty je založen na opakovaném použití trojúhelníkové nerovnosti a definice limity. Cílem je vždy odhadnout výraz $|V(a_n, b_n) - V(A, B)|$, kde V je daná aritmetická operace, pomocí výrazů $|a_n - A|$ a $|b_n - B|$, o kterých víme, že jsou od jistého n_0 libovolně malé.

- **Pro součet** využijeme odhad založený na trojúhelníkové nerovnosti:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Jelikož pro libovolné $\varepsilon/2 > 0$ dokážeme najít n_0 tak, že $|a_n - A| < \varepsilon/2$ a $|b_n - B| < \varepsilon/2$, bude součet menší než ε .

- **Pro součin** je klíčem vhodné přepsání výrazu (roznásobíme závorky, přitom rozdíl $a_n - A$, $b_n - B$ považujeme za jeden člen v závorce; členy AB , $-AB$ se sečtou na nulu, tak je nepíšeme):

$$\begin{aligned} a_n b_n - AB &= (a_n - A + A)(b_n - B + B) - AB \\ &= (a_n - A)(b_n - B) + (a_n - A)B + A(b_n - B) \end{aligned}$$

Na tento výraz aplikujeme trojúhelníkovou nerovnost:

$$|a_n b_n - AB| \leq |a_n - A| |b_n - B| + |B| |a_n - A| + |A| |b_n - B|$$

Všechny tři sčítance na pravé straně dokážeme pro dostatečně velké n udělat libovolně malé. Důkaz pro podíl je technicky náročnější, ale vychází z podobných principů.

Příklad 3: Vypočteme limitu posloupnosti s n -tým členem

$$a_n = \frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2}$$

Po úpravě

$$\frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2} = \frac{n^3(1 - 3/n^2 + 4/n^3)}{n^3(3 - 2/n)} = \frac{1 - 3/n^2 + 4/n^3}{3 - 2/n}$$

použijeme větu o aritmetice limit a výsledky příkladů 1, 2 k výpočtu limity jmenovatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2/n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-2) \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

Podobně spočítáme limitu čitatele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3/n^2 + 4/n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3 \cdot 1/n \cdot 1/n + 4 \cdot 1/n \cdot 1/n \cdot 1/n = 1 - 0 + 0$$

a závěrečným použitím věty o limitě podílu dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3/n^2 + 4/n^3}{3 - 2/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - 3/n^2 + 4/n^3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2/n} = \frac{1}{3}$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n + 4}{3n^3 - 2n^2} = \frac{1}{3}$$

3. Omezená posloupnost

Omezenost (někdy též ohraničenost) nám říká, že hodnoty členů posloupnosti nepřekročí určitou mez.

Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že je:

- **Omezená shora**, jestliže existuje takové reálné číslo $K \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq K$. Číslo K se nazývá **horní závora**.
- **Omezená zdola**, jestliže existuje takové reálné číslo $L \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq L$. Číslo L se nazývá **dolní závora**.
- **Omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Příklad: Posloupnost $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**. Její členy jsou vždy menší nebo rovny 1 (horní závora) a větší než 0 (dolní závora).

Věta o omezenosti konvergentní posloupnosti

Mezi konvergencí a omezeností existuje důležitý vztah, který popisuje následující věta.

Věta: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz:

Nechť (a_n) je konvergentní posloupnost s vlastní limitou $A \in \mathbb{R}$. Podle definice limity, pokud zvolíme například $\varepsilon = 1$, musí existovat takový index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ platí nerovnost:

$$|a_n - A| < 1$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s dvojitou nerovností:

$$A - 1 < a_n < A + 1$$

Tím jsme ukázali, že všechny členy posloupnosti od indexu $n_0 + 1$ dále jsou omezené. Zbývá nám pouze konečný počet členů na začátku posloupnosti: $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$. Nyní můžeme definovat dolní a horní závoru pro **celou** posloupnost. Dolní závoru L definujeme jako minimum z první konečné části posloupnosti a hodnoty $A - 1$:

$$L = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A - 1\}$$

Horní závoru K definujeme jako maximum z první konečné části posloupnosti a hodnoty $A + 1$:

$$K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, A + 1\}$$

Jelikož se jedná o minimum a maximum z konečného počtu reálných čísel, hodnoty L a K jsou dobře definovaná reálná čísla. Z naší konstrukce plyne, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $L \leq a_n \leq K$. Posloupnost (a_n) je tedy omezená zdola i shora, a proto je omezená. ■

4. Monotonní posloupnosti

Monotonie popisuje "směr" chování posloupnosti. Říká nám, zda její členy rostou, nebo klesají.

Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že je:

- **Rostoucí**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} > a_n$.
- **Neklesající**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} \geq a_n$.
- **Klesající**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} < a_n$.
- **Nerostoucí**, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí: $a_{n+1} \leq a_n$.

Posloupnosti, které splňují kteroukoli z výše uvedených podmínek, nazýváme **monotonní**. Pokud platí ostrá nerovnost ($>$ nebo $<$), mluvíme o **ryze monotonních** posloupnostech. **Příklad:** Posloupnost $(n^2)_{n=1}^\infty = (1, 4, 9, \dots)$ je **rostoucí**. Posloupnost $(-\frac{1}{n})_{n=1}^\infty = (-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots)$ je také **rostoucí**. Posloupnost $((-1)^n)_{n=1}^\infty = (-1, 1, -1, \dots)$ **není monotonní**.

Věta o limitě monotonní posloupnosti

Kombinace monotonie a omezenosti je velmi silná vlastnost, která zaručuje existenci limity. Pro formulaci a důkaz klíčové věty budeme potřebovat pojem suprema a jednu ze základních vlastností reálných čísel.

Definice (Supremum):

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, shora omezená množina. Číslo $s \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny M , jestliže platí:

1. s je horní závora množiny M (tj. pro každé $x \in M$ platí $x \leq s$).
2. s je nejmenší horní závora (tj. pro každé $s' < s$ existuje $x \in M$ takové, že $x > s'$).

Supremum značíme $s = \sup M$.

Axiom o supremu:

Každá neprázdná, shora omezená podmnožina reálných čísel $\mathbb{R}$ má právě jedno supremum.

Tento axiom je fundamentální vlastností množiny reálných čísel, která odlišuje $\mathbb{R}$ například od množiny racionálních čísel $\mathbb{Q}$.

Věta (o existenci limity monotonní posloupnosti):

Každá neklesající a shora omezená posloupnost je konvergentní. Její limita je rovna supremu množiny jejích členů.

Důkaz:

Nechť (a_n) je neklesající a shora omezená posloupnost. Označme $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ množinu všech členů této posloupnosti.

- Množina M je neprázdná.
- Z předpokladu je posloupnost shora omezená, tedy i množina M je shora omezená.

Podle axiomu o supremu existuje právě jedno reálné číslo $A = \sup M$. Ukážeme, že toto číslo je limitou posloupnosti (a_n) .

Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$.

- Protože A je supremum M , platí $a_n \leq A$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Z druhé vlastnosti suprema víme, že číslo $A - \varepsilon$ již není horní závorou množiny M . Musí tedy existovat nějaký člen posloupnosti, označme ho a_{n_0} , který je větší než $A - \varepsilon$. Platí tedy $a_{n_0} > A - \varepsilon$.
- Jelikož je posloupnost (a_n) neklesající, pro všechna $n > n_0$ musí platit $a_n \geq a_{n_0}$.

Když tyto poznatky spojíme, dostaneme, že pro všechna $n > n_0$ platí:

$$A - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq A$$

Z této nerovnosti plyne, že všechny členy a_n pro $n > n_0$ leží v intervalu $(A - \varepsilon, A]$. To je ekvivalentní zápisu $|a_n - A| < \varepsilon$. Tím jsme z definice dokázali, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. ■

Analogická věta platí i pro nerostoucí a zdola omezené posloupnosti, jejichž limita je rovna infimu množiny jejich členů.

Příklad (Definice Eulerova čísla):

Jedním z nejdůležitějších příkladů v matematické analýze je posloupnost s n -tým členem $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- Lze dokázat (například s pomocí binomické věty), že tato posloupnost je **rostoucí**.
- Dále lze ukázat, že je **shora omezená**, například číslem 3.

Jelikož je posloupnost rostoucí a shora omezená, musí být podle předchozí věty konvergentní. Její limitu nazýváme **Eulerovo číslo** a značíme ji písmenem e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Eulerovo číslo je iracionální číslo (a dokonce transcendentní), jeho hodnota je přibližně $e \approx 2,71828$.

5. Vybrané posloupnosti

Definice (Vybraná posloupnost):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazveme **posloupností vybranou** z posloupnosti (a_n) .

Jinými slovy, vybraná posloupnost vznikne tak, že z původní posloupnosti vybereme některé (i nekonečně mnoho) členy, ale zachováme jejich původní pořadí.

Příklad: Z posloupnosti $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ můžeme vybrat posloupnost sudých členů: $(a_{2n}) = \left(\frac{1}{2n}\right) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots)$. Zde je $k_n = 2n$.

Věta o limitě vybrané posloupnosti

Věta: Nechť posloupnost (a_n) má limitu $A \in \mathbb{R}$. Potom každá posloupnost (a_{k_n}) vybraná z (a_n) má také limitu A .

Důkaz:

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Chceme dokázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = A$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice limity pro posloupnost (a_n) víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$.

Nyní uvažme rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) . Jelikož je rostoucí, platí $k_n \geq n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tedy, pokud zvolíme $n > n_0$, bude platit také $k_n \geq n > n_0$.

To znamená, že pro všechna $n > n_0$ je index k_n také větší než n_0 . Proto pro všechna $n > n_0$ platí nerovnost $|a_{k_n} - A| < \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = A$. ■

Poznámka:

Jiná, méně formální úvaha k důkazu: Definice limity nám říká, že pro libovolné $\varepsilon >$

0 leží všechny členy posloupnosti (a_n) až na konečně mnoho výjimek uvnitř intervalu $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Jelikož vybraná posloupnost (a_{k_n}) je tvořena pouze z členů původní posloupnosti, může i ona obsahovat pouze konečně mnoho členů, které tuto podmínku nesplňují. Musí tedy také konvergovat ke stejné limitě A .

Příklad (využití věty):

Uvažujme posloupnost $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$. Ukážeme, že tato posloupnost **nemá limitu**.

- Zvolme vybranou posloupnost sudých členů. Tedy $k_n = 2n$. Dostáváme posloupnost $(a_{2n}) = ((-1)^{2n}) = (1, 1, 1, \dots)$. Jedná se o konstantní posloupnost, jejíž limita je zjevně $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$.
- Nyní zvolme vybranou posloupnost lichých členů. Tedy $k_n = 2n - 1$. Dostáváme posloupnost $(a_{2n-1}) = ((-1)^{2n-1}) = (-1, -1, -1, \dots)$. Toto je opět konstantní posloupnost, jejíž limita je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1$.

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity ($1 \neq -1$). Pokud by původní posloupnost (a_n) měla nějakou limitu A , musely by podle předchozí věty mít všechny vybrané posloupnosti také tutéž limitu A . To je ve sporu s naším zjištěním. Proto posloupnost $a_n = (-1)^n$ nemůže mít limitu.