

1 Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě

V této části se budeme zabývat dvěma základními větami diferenciálního počtu, které navazují na Weierstrassovu větu: Rolleovou větou a Lagrangeovou (věta o střední hodnotě).

Fermatova věta o stacionárních bodech

Věta (Fermatova). *Nechť $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě $c \in (a, b)$ lokální extrém (minimum nebo maximum) a je v tomto bodě diferencovatelná. Pak platí*

$$f'(c) = 0.$$

Důkaz. Předpokládejme, že c je bod lokálního maxima. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (c - \delta, c + \delta)$ platí $f(x) \leq f(c)$. Pro $h > 0$ dostáváme

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0,$$

protože $f(c+h) \leq f(c)$ a jmenovatel h je kladný. Pro $h < 0$ je naopak

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

protože $\frac{1}{h} < 0$ a opět $f(c+h) \leq f(c)$. Existuje-li derivace $f'(c)$, je to společná limita těchto podílů zleva i zprava, tedy musí být současně ≤ 0 i ≥ 0 , a proto $f'(c) = 0$.

Pro lokální minimum je důkaz úplně obdobný. □

Fermatova věta říká, že v lokální extrémní hodnotě (pokud derivace existuje) musí být derivace nulová. Takovým bodům se říká *stacionární*.

Rolleova věta

Věta (Rolleova). *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$, diferencovatelná na (a, b) a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že*

$$f'(c) = 0.$$

Důkaz. Podle Weierstrassovy věty funkce f nabývá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b]$ globálního minima a maxima. Jsou-li všechny hodnoty $f(x)$ stejné, je funkce konstantní a derivace je nulová v každém bodě intervalu (a, b) , takže tvrzení platí triviálně.

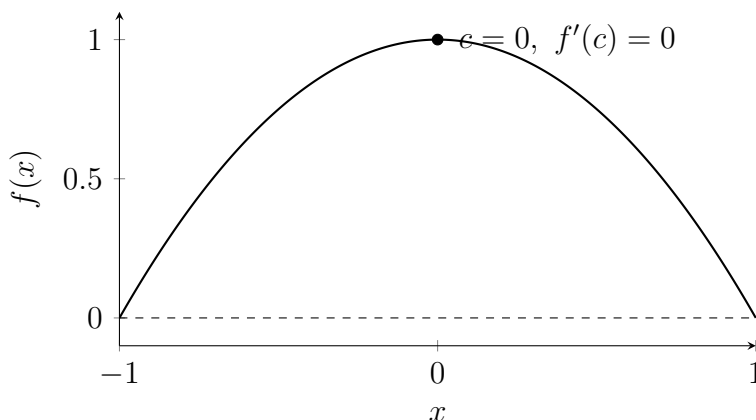
Předpokládejme tedy, že f není konstantní. Pak je globální minimum nebo maximum (alespoň jeden z nich) dosaženo v nějakém vnitřním bodě $c \in (a, b)$. V tomto bodě má f lokální extrém. Jelikož je f v c diferencovatelná, můžeme použít Fermatovu větu, která říká, že $f'(c) = 0$. $\square$

Ilustrace Rolleovy věty

Jako příklad uvažujme funkci

$$f(x) = 1 - x^2 \quad \text{na } [-1, 1].$$

Je spojitá na $[-1, 1]$, diferencovatelná na $(-1, 1)$ a platí $f(-1) = f(1) = 0$. Rolleova věta tedy zaručuje existenci bodu $c \in (-1, 1)$ s $f'(c) = 0$. Zde je $f'(x) = -2x$, takže $f'(c) = 0$ právě pro $c = 0$.



Obrázek 1: Rolleova věta: funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $[-1, 1]$.

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova, o střední hodnotě). *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) . Pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pravá strana je směrnice sečny spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Věta říká, že existuje bod c , v němž je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s touto sečnou.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci

$$\ell(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

což je rovnice přímky procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Dále položíme

$$g(x) = f(x) - \ell(x).$$

Pak je g spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) (rozdíl dvou takových funkcí). Navíc

$$g(a) = f(a) - \ell(a) = 0, \quad g(b) = f(b) - \ell(b) = 0.$$

Na funkci g můžeme tedy použít Rolleovu větu, a dostáváme existenci bodu $c \in (a, b)$ takového, že $g'(c) = 0$. Protože

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

dostáváme po dosazení $x = c$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tedy

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Ilustrace Lagrangeovy věty

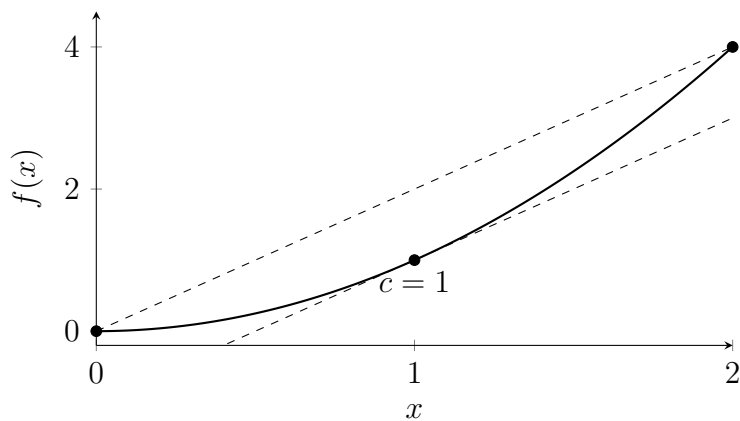
Uvažujme funkci

$$f(x) = x^2 \quad \text{na } [0, 2].$$

Směrnice sečny spojující body $(0, 0)$ a $(2, 4)$ je

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = 2.$$

Derivace je $f'(x) = 2x$, takže existuje bod c s $f'(c) = 2$, konkrétně $c = 1$.



Obrázek 2: Lagrangeova věta: tečna je rovnoběžná se sečnou koncových bodů.

2 Postačující podmínky monotonie

Definice monotonie

Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Řekneme, že f je (*ostře*) *rostoucí* na $[a, b]$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

- Řekneme, že f je (*ostře*) *klesající* na $[a, b]$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

- Řekneme, že f je *neklesající* na $[a, b]$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

- Řekneme, že f je *nerostoucí* na $[a, b]$, jestliže

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Věta o monotonii pomocí derivace

Věta. Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) .

1. Jestliže $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f na $[a, b]$ neklesající.
2. Jestliže $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f na $[a, b]$ nerostoucí.

Důkaz (první případ). Uvažujme $x_1, x_2 \in [a, b]$ s $x_1 < x_2$. Aplikujeme Lagrangeovu větu na funkci f na intervalu $[x_1, x_2]$. Existuje tedy bod $c \in (x_1, x_2)$ takový, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Z předpokladu máme $f'(c) \geq 0$ a zároveň $x_2 - x_1 > 0$, proto

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Odtud $f(x_1) \leq f(x_2)$, což znamená, že f je na $[a, b]$ neklesající.

Druhý bod se dokazuje naprosto analogicky: z podmínky $f'(x) \leq 0$ dostaneme z Lagrangeovy věty nerovnost $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, tedy $f(x_1) \geq f(x_2)$ a f je nerostoucí. $\square$

Věty o podmínkách pro rostoucí a klesající funkci

Věta. *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) . Jestliže $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f na $[a, b]$ rostoucí.*

Věta. *Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b) . Jestliže $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak je f na $[a, b]$ klesající.*

Důkazy těchto vět jsou zcela analogické předchozí větě (o neklesající a nerostoucí funkci): stačí nahradit nerovnosti ≥ 0 resp. ≤ 0 striktními nerovnostmi > 0 resp. < 0 .

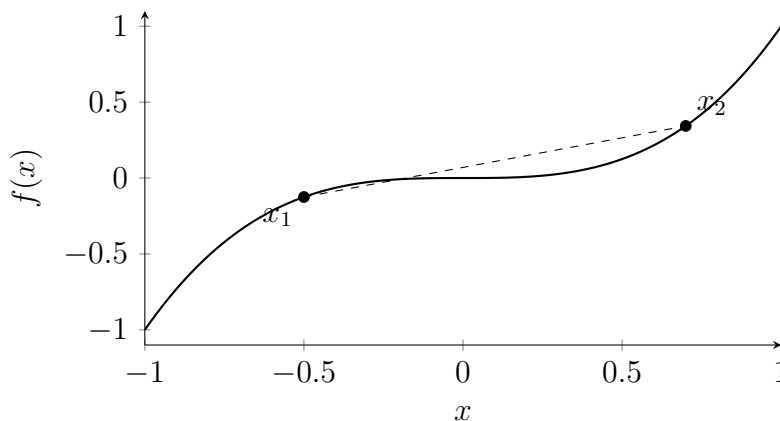
Ilustrace monotonie

Rostoucí funkce s nezápornou derivací

Uvažujme funkci

$$f(x) = x^3 \quad \text{na } [-1, 1].$$

Je diferencovatelná na $(-1, 1)$, derivace je $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, a proto je podle věty neklesající (ve skutečnosti je ale ostře rostoucí, viz diskusi níže).



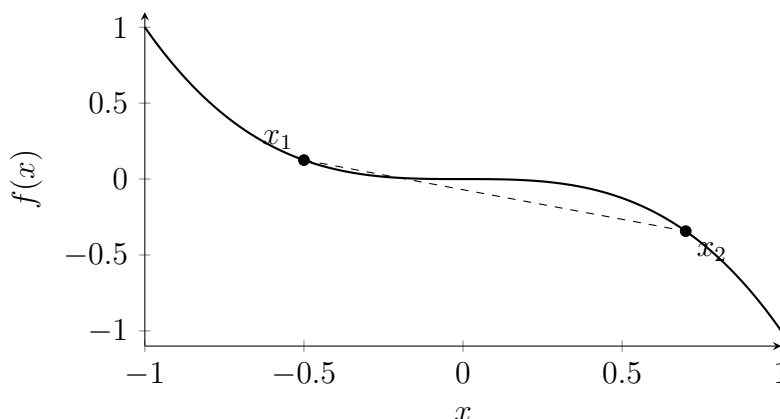
Obrázek 3: Funkce $f(x) = x^3$: derivace $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

Klesající funkce se zápornou derivací

Analogicky uvažujme

$$f(x) = -x^3 \quad \text{na } [-1, 1].$$

Derivace je $f'(x) = -3x^2 \leq 0$, takže funkce je podle věty nerostoucí (ve skutečnosti ostře klesající).



Obrázek 4: Funkce $f(x) = -x^3$: derivace $f'(x) = -3x^2 \leq 0$.

Příklad: funkce $f(x) = x^3$ a rozdíl mezi neklesající a rostoucí

Všimněme si jemného rozdílu mezi pojmy *neklesající* a *rostoucí*.

Funkce

$$f(x) = x^3 \quad \text{na } \mathbb{R}$$

má derivaci

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

přičemž $f'(0) = 0$. Z postačující podmínky monotonie tedy plyne pouze to, že f je *neklesající* na každém intervalu $[a, b]$.

Na druhou stranu z definice snadno ověříme, že f je dokonce *rostoucí* na $\mathbb{R}$: pro libovolná $x_1 < x_2$ platí

$$x_1^3 < x_2^3,$$

což lze dokázat například tak, že

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0,$$

protože $x_2 - x_1 > 0$ a zároveň $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 > 0$.

Tento příklad ukazuje dvě důležité skutečnosti:

- Podmínka $f'(x) \geq 0$ je pouze *postačující* pro neklesající funkci, nikoli nutná.
- Podobně podmínka $f'(x) > 0$ není *nutná* pro rostoucí funkci. Existence bodů s $f'(x) = 0$ (zde $x = 0$) nevylučuje, že funkce může být na celém intervalu rostoucí.

Zatímco věty s podmínkou $f'(x) > 0$ dávají silný výsledek „funkce je rostoucí“, v praxi často stačí slabší podmínka $f'(x) \geq 0$, která zaručuje neklesavost a ponechává prostor pro jemnější analýzu konkrétní funkce (jako v případě funkce x^3).