10.3 Newtonův integrál

Definice 10.3.1. Nechť $K \subset I$ je konečná množina a nechť pro funkci F definovanou na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a funkci f definovanou na $I \setminus K$, platí

$$F'(x) = f(x)\,,\ x \in I \setminus K\,,$$

Dále nechť je F *spojitá funkce na* I. Potom říkáme, že F je *zobecněná primitivní funkce* k f na I.

Poznámka 10.3.2. Každá primitivní funkce F k funkci f na otevřeném intervalu I je zároveň zobecněnou primitivní funkcí k funkci f (výjimečná množina K je prázdná). Proto je Definice 10.3.1 pouze rozšířením již dříve uvedené definice primitivní funkce.

Zobecněné primitivní funkce mají některé společné vlastnosti s primitivními funkcemi, zejména důležitou vlastnost, že rozdíl dvou *zobecněných* primitivních funkcí k téže funkci f na (a,b) je funkce konstantní.

Lemma 10.3.3. *Je-li F zobecněná primitivní funkce k nezáporné funkci f na intervalu I, pak je F neklesající na I.*

Důkaz. Existuje konečná množina $K \subset I$ taková, že $F'(x) = f(x) \geq 0$, $x \in I \setminus K$. Označme její body, které jsou vnitřními body I, podle velikosti $x_1, x_2, \ldots x_m$, tj. nechť platí

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_m\,.$$

Dále označme

$$I_0 = \{x \in I;\ x \leq x_1\}\,,\quad I_m = \{x \in I;\ x \geq x_m\}\,,$$
$$I_k = [\,x_k, x_{k+1}\,],\quad k = 1, 2, \ldots, (m-1)\,.$$

Na všech intervalech I_k, $k = 1, \ldots, m$ je spojitá funkce F neklesající podle Lagrangeovy věty, a proto je též neklesající v každém bodě $x \in I$. Podle Věty 10.1.11 je F neklesající na I. □

Poznámka 10.3.4. I bez užití Věty 10.1.11 je dokončení předchozího důkazu snadné, ale pracnější; takto jsme ukázali jednu z možných situací, kde lze Větu 10.1.11 s výhodou použít. Předcházející lemma ještě použijeme dále, nyní zaznamenáme pouze jeho samozřejmý důsledek (čtenář si může za cvičení rozmyslit, jak se Důsledek 10.3.5 dokáže přímo, bez užití Věty 10.1.11).

Důsledek 10.3.5. *Nechť F, G jsou zobecněné primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Potom jejich rozdíl $F - G$ je konstantní funkce na I.*

Definice 10.3.6. Nechť F je zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu o koncových bodech a, b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Potom definujeme

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\,,$$

pokud rozdíl limit vpravo má smysl. V tomto případě říkáme, že *integrál existuje*. Jsou-li navíc obě limity konečné (a tedy i hodnota integrálu je konečná), říkáme, že *integrál konverguje*. Vpravo stojící přírůstek zobecněné primitivní funkce značíme zkráceně

$$F(b-) - F(a+) = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = [\,F\,]_a^b\,.$$

Poznámka 10.3.7. Důsledek 10.3.5 ukazuje, že Definice 10.3.6 je korektní, tj. nezávislá na volbě zobecněné primitivní funkce F. Někdy je tento integrál nazýván *zobecněný Newtonův integrál* a název Newtonův integrál se užívá pro případ, kdy je interval I v Definici 10.3.6 otevřený a $K = \emptyset$. Často se též v Definici 10.3.6 žádá konečnost integrálu; v tom případě splývá existence integrálu s jeho konvergencí.

Důvod pro zavedení „výjimečné" množiny K je následující. Pokud bychom žádali, aby platilo $K = \emptyset$, pak např. funkce sgn má primitivní funkce na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$, ale ne na intervalu $(-1,1)$. Připustíme-li konečnou „výjimečnou" množinu K, je $|x|$, $x \in \mathbb{R}$ zobecněnou primitivní funkcí k funkci sgn; lze ukázat, že existuje zobecněná primitivní funkce i k $\log(|x|)$ na $\mathbb{R}$ apod. Věty o Newtonově integrálu mohou být formulovány v mnohem elegantnější formě. Pro početní stránku věci však nemá toto relativně jednoduché zobecnění velký smysl.

Poznamenejme, že je možné pracovat i se *spočetnou* „výjimečnou množinou" K, což je založeno na tvrzení že i rozdíl dvou takto definovaných zobecněných primitivních funkcí je na intervalu konstantní; viz např. [1], str. 32.

Poznámka 10.3.8. Také o Newtonově integrálu dokážeme několik tvrzení, která jsou užitečná při výpočtech. Označme $\mathcal{N}(a,b)$ množinu všech funkcí f definovaných na intervalu o koncových bodech a, b, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, pro které *konverguje* Newtonův integrál z f na I. Protože jsou příslušné důkazy velmi jednoduché, uvedeme některá tvrzení bez důkazu. Symbol $(\mathcal{N})$- před integrálem budeme vynechávat.

Věta 10.3.9. *Newtonův integrál je ve zřejmém smyslu lineárním funkcionálem na $\mathcal{N}(a,b)$ (srovnej s Označením 10.2.21), tj. pro každou dvojici funkcí $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Jsou-li F, G zobecněné primitivní funkce k funkcím f, g, pak $\alpha F + \beta G$ je zřejmě zobecněná primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$. Z konečnosti limit všech vyšetřovaných funkcí v krajních bodech intervalu (a,b) plyne dokazované tvrzení. □

Věta 10.3.10. *Nechť pro funkce f, g platí $f \le g$ všude na intervalu I až na konečnou množinu K. Potom*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud oba integrály existují.

Důkaz je velmi jednoduchý. Stačí uvážit, že existuje zobecněná primitivní funkce k $g-f$ na I a použít Větu 10.3.3.

Jako důsledek dostaneme tvrzení pro odhad absolutní hodnoty Newtonova integrálu. Platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

jakmile oba integrály existují.

Věta 10.3.11. *Nechť $-\infty \le a < c < b \le +\infty$. Potom pro $f \in \mathcal{N}(a,b)$ platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

Důkaz opět přenecháme čtenáři.

Někdy je užitečné následující lemma, které dokážeme; při jeho důkazu se již podruhé setkáme s pojmem, který sehraje důležitou roli při dalším zkoumání diferenciálních rovnic.

Lemma 10.3.12. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a nechť f je spojitá a omezená funkce na intervalu (a,b). Potom existuje Newtonův integrál z f na (a,b).*

Důkaz. Ze spojitosti f plyne, že k ní existuje primitivní funkce na (a,b). Jestliže je $|f(x)| \le M < \infty$, pak pro tuto primitivní funkci F platí pro libovolná $x, y \in (a,b)$ nerovnost

$$|F(x) - F(y)| \le M|x-y|\,.$$

Odtud však vyplývá, že F je stejnoměrně spojitá na (a,b) a lze ji tedy spojitě rozšířit na $[a,b]$. Zbytek je zřejmý (srovnejte s Lemmatem 10.2.39). □

Pro primitivní funkce jsme dokázali větu o integraci per-partes a větu o substituci, tj. Věty 8.2.4 a 8.2.7. Po nezbytné modifikaci lze analogická tvrzení dokázat i pro Newtonův integrál.

Věta 10.3.13 (metoda per-partes). *Nechť funkce f, g mají zobecněné primitivní funkce F, G na (a,b), a nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$. Pak platí*

$$\int_a^b fG = [FG]_a^b - \int_a^b Fg\,, \tag{10.20}$$

pokud jsou alespoň dva z výrazů v rovnosti (10.20) konečné.

Důkaz. Rozlišíme dva případy (symetrie v f, g):
(1) Funkce fG má zobecněnou primitivní funkci Φ a Fg má zobecněnou primitivní funkci Ψ na (a,b), přičemž $[\Phi]_a^b$ a $[\Psi]_a^b$ jsou konečné. Potom platí

$$(FG)' = fG + Fg = \Phi' + \Psi' = (\Phi + \Psi)'\,,$$

což znamená, že FG i $\Phi + \Psi$ jsou zobecněné primitivní funkce k téže funkci $fG + Fg$. Je tedy

$$[FG]_a^b = [\Phi]_a^b + [\Psi]_a^b = \int_a^b fG + \int_a^b Fg\,,$$

což jsme měli dokázat.
(2) Předpokládejme, že má smysl pravá strana vzorce (10.20), tj. $[FG]_a^b$ a také $\int_a^b Fg$. Označme opět Ψ zobecněnou primitivní funkci k Fg a položme $\Phi = FG - \Psi$. Potom platí

$$\Phi' = (FG - \Psi)' = fG + Fg - Fg = fG$$

všude až na konečný počet bodů z (a,b), tedy Φ je zobecněná primitivní funkce k fG. Zbytek plyne z konečnosti příslušných přírůstků. □

Věta 10.3.14 (substituční metoda). *Nechť platí $-\infty \le a < b \le +\infty$, a dále nechť je $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$, $\varphi : (\alpha,\beta) \overset{\text{na}}{\to} (a,b)$ je ryze monotónní spojitá funkce, která má konečnou nenulovou derivaci všude v $(\alpha,\beta) \setminus K$, kde K je opět konečná množina. Potom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

existuje-li jeden z integrálů.

Důkaz. Nechť existuje integrál vlevo a φ je rostoucí. Nechť $F'(x) = f(x)$ na $(a,b) \setminus L$, kde L je konečná. Označíme-li $G = F \circ \varphi$, pak $G' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'$ platí v $(\alpha,\beta) \setminus M$, kde $M = K \cup \varphi^{-1}(L)$ je konečná. Je tedy G zobecněná primitivní funkce k $(f \circ \varphi)\varphi'$ na (α,β) a je

$$G(\alpha+) = F(a+)\,,\ G(\beta-) = F(b-)$$

podle věty o limitě složené funkce. Odtud plyne existence integrálu vpravo a dokazovaná rovnost.

Druhou část obdržíme „substitucí φ^{-1}" do $(f \circ \varphi)\varphi'$:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\varphi' = \int_a^b (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})' = \int_a^b f\,.$$

Součin posledních dvou závorek ve vyjádření integrované funkce v druhém integrálu je roven 1 podle věty o derivování inverzní funkce (Věta 6.4.4). Podobně probíhá důkaz i pro φ klesající, dojde jen k záměně za

$$G(\alpha+) = F(b-)\,,\ G(\beta-) = F(a+)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 10.3.15. Poznamenejme, že v této variantě substituční metody nemáme obtíže s funkcemi, definovanými na různých intervalech; při substituci se transformují současně i meze a při zápisu píšeme rovnosti mezi čísly a ne mezi vzájemně různými, avšak spolu souvisejícími primitivními funkcemi.

Věta 10.3.16. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a nechť k f existuje zobecněná primitivní funkce F na $[a,b]$. Potom*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.21}$$

Důkaz. Funkce f je omezená, a tak z Lemmatu 10.2.39 plyne, že zobecněná primitivní funkce F je stejnoměrně spojitá na (a,b), a tedy podle Věty 10.1.21 je spojitě rozšiřitelná na $[a,b]$. Existují tedy konečné limity $F(a) := F(a+)$ a $F(b) := F(b-)$. Dále existuje konečná množina $K \subset [a,b]$ taková, že platí $F' = f$ na $[a,b] \setminus K$. Zvolme dále libovolné $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, aby toto dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ obsahovalo všechny body z K. Potom podle Lagrangeovy věty existují body ζ_k, $\zeta_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že platí

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Odtud plyne pro horní a dolní součty

$$s(f;D) \le F(b) - F(a) \le S(f;D)\,,$$

a tedy, s ohledem na $f \in \mathcal{R}(a,b)$, platí rovnost 10.21. □

Poznámka 10.3.17. Právě dokázaná věta má zásadní význam i pro výpočty. Je to tzv. *základní věta integrálního počtu.* Analogická tvrzení jako je Věta 10.3.16 se dokazují i pro jiné (případně obecnější) integrály. Lze jí dát i tento tvar:

Věta 10.3.18. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{N}(a,b)$, tj. f je riemannovsky a newtonovsky integrovatelná na (a,b). Potom jsou si příslušné integrály rovny.*

Důkaz. Z riemannovské integrability f plyne, že $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce f je omezená. Oba integrály jsou konečné. Dále existuje zobecněná primitivní funkce F k f a konečná množina $K \subset [a,b]$ tak, že $F' = f$ v $(a,b) \setminus K$. Funkci F lze spojitě rozšířit na $[a,b]$; to plyne např. i z toho, že Newtonův integrál z f je konečný. Zbytek je zřejmý. □

10.4 Některé aplikace

Uvedeme pro ilustraci několik krátkých aplikací: Je-li g *spojitá* vektorová funkce, tj. $g = (g^1, \ldots, g^m)$, a *složky* g_k jsou spojité funkce pro všechna $k = 1, 2, \ldots, m$,

pak je přirozené graf tohoto zobrazení považovat za křivku v $\mathbb{R}^m$. Často bývá přímo *toto zobrazení* nazýváno *křivkou* v $\mathbb{R}^m$. Pak píšeme např. $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ pro *rovinnou křivku*, nebo $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ pro *křivku v* $\mathbb{R}^m$. Jak lze definovat pro takovou křivku její délku? Pokusme se to provést v souladu s intuitivními představami, které zatím o křivkách máme k dispozici.

Příklad 10.4.1. Je vcelku přirozené položit pro $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ a pro dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$, pro které je $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$,

$$L(g,D) := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dist}(g(x_k), g(x_{k-1}))\,,$$

kde dist značí vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru. Význam tohoto čísla je názorný: mezi body x_k, $k = 0, \ldots, n$, jsme g nahradili lineárním zobrazením a sečtením zjistili délku „vepsané lomenice". Z trojúhelníkové nerovnosti [7]) vyplývá, že jsou-li $D, D' \in \mathcal{D}(a,b)$, a D' je zjemněním dělení D, je

$$L(g,D) \le L(g,D')\,,$$

a tak se *intuitivně* můžeme zjemňováním dělení intervalu $[a,b]$ k délce křivky (nevíme zatím, co to je!) s libovolnou přesností přibližovat.

Úvahy z předcházejícího příkladu nás vedou k definici:

Definice 10.4.2. Je-li $g : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ zobrazení se spojitými složkami, pak *délku* $L(g)$ *křivky* g na $[a,b]$ definujeme vzorcem

$$L(g) := \sup\{L(g,D);\ D \in \mathcal{D}(a,b)\}\,. \tag{10.22}$$

Příklad 10.4.3. Pro graf funkce, tj. případ $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, kdy pro funkci f definovanou na $[a,b]$ definujeme křivku pomocí zobrazení $F : x \mapsto [x, f(x)]$, $x \in [a,b]$, se pokusíme nalézt souvislost s probíranou látkou. Položme

$$\begin{aligned} L(F,D) &:= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

Pokud má f všude derivaci, existují uvnitř dělících intervalů dělení D body ζ_k tak, že lze součet vyjádřit podle Lagrangeovy věty ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\zeta_k))^2}\,.$$

[7]) Máme na mysli její geometrickou formu, známou ze středoškolské látky: součet délek dvou stran trojúhelníku je větší nebo roven délce jeho třetí strany, přičemž rovnost nastane v případě, že trojúhelník přejde v úsečku.

Označme $h = \sqrt{1 + (f')^2}$ na (a, b). Pak platí

$$s(h; D) \le \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(\zeta_k))^2} \le S(h; D)\,,$$

a pokud je $h \in \mathcal{R}(a, b)$, lze přejít k supremu přes $\mathcal{D}(a, b)$ a tak obdržet pro délku grafu $L(f; a, b)$ vzorec

$$L(f; a, b) := L(F) = (\mathcal{R})\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aniž bychom prováděli další zkoumání, poznamenejme, že je přirozené tuto definici rozšířit a *definovat* $L(f; a, b)$ analogicky i v případě, že integrál vpravo existuje jako integrál Newtonův.

Poznámka 10.4.4. Analogicky jako jsme při vyšetření délky křivky dospěli ke vzorci

$$L(f; a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

lze definovat *povrch* P a *objem* V rotačního tělesa $Tf_{\mathrm{rot}} \subset \mathbb{R}^3$, vzniklého rotací „podgrafu" spojité kladné funkce f na $[a, b]$ „kolem osy x". Těleso Tf_{rot} je definováno pomocí vztahu

$$Tf_{\mathrm{rot}} := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ y^2 + z^2 \le f^2(x),\ x \in [a, b]\}\,.$$

Definujeme

$$V(Tf_{\mathrm{rot}}; a, b) := \pi \int_a^b f^2\,, \quad \text{a} \quad P(Tf_{\mathrm{rot}}; a, b) := 2\pi \int_a^b f\sqrt{1 + (f')^2}\,,$$

pokud existuje integrál na pravé straně definiční rovnosti, ať již v Riemannově či Newtonově smyslu.

Tak lze eventuálně určit např. délku polokružnice, či povrch a objem speciálně položené koule v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od délky křivky chápeme vzorce jako „z nebe spadlé" definice. Pokud bychom se opřeli o názor a pracovali např. s tělesu opisovaným a vepisovaným konečným sjednocením válečků či částí kuželových ploch, dospěli bychom ke shodě vzorečků s „intuitivní představou".

Příklad 10.4.5 (délka kružnice). Nechť $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Pak platí

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,, \quad 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,.$$

Proto pro délku polokružnice o rovnici $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ platí

$$L(f; -r, r) = \int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_{x=-r}^{r} = \pi r\,.$$

Odtud dostáváme pro délku $O(k)$ kružnice k o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$ vzorec $O(k) = 2\pi r$.

Příklad 10.4.6. Rotací podgrafu funkce f z předcházejícího příkladu vznikne koule $K := Tf_{\mathrm{rot}}$ o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 \le r^3$. Spočteme její objem

$$V(K) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

Příklad 10.4.7. Výpočet pro povrch koule K dává

$$P(K) = 2\pi \int_{-r}^{r} \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi r[x]_{x=-r}^{x=r} = 4\pi r^2\,.$$

Příklad 10.4.8. V úvodní kapitole jsme se zmínili o tom, že to byl již Archimedes (287 – 212 před n. l.), který jako první dokázal, že konstanty úměrnosti, vyskytující se ve vzorcích pro obvod a obsah kruhu, splývají (čtenář to nemusí shledávat jako zajímavé, když ví, že se v obou těchto vzorcích vyskytuje jako konstanta úměrnosti π). Imitujte tento důkaz tím, že dokážete rovnost

$$\int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Již dříve jsme se několikrát setkali s číslem π. Ukážeme si jednu „teoretickou aplikaci".

Příklad 10.4.9. Definujme $I_n := \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Pro $n > 1$ položme

$$F(x) = \sin^{n-1} x\,, \quad g(x) = \sin x\,,$$
$$f(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,, \quad G(x) = -\cos x\,,$$

takže podle Věty 10.3.13 platí

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (n-1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,,$$

a je tedy

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}\,, \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\,.$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudá $n \in \mathbb{N}$ $(n = 2m,\ m \in \mathbb{N})$

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{1}{2} I_0\,, \tag{10.23}$$

a pro lichá n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ $(n = 2m + 1,\ m \in \mathbb{N})$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{2}{3} I_1\,. \tag{10.24}$$

Tyto dva vzorce určují I_n pro každé celé $n \in \mathbb{N}$, protože je

$$I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{2}\pi\,, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -[\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1\,.$$

Poznámka 10.4.10. Příklad 10.4.9 vede k zajímavému vyjádření čísla π. V intervalu $[0, \pi/2]$ je $0 \le \sin \le 1$, a tedy je $(\sin)^n \ge (\sin)^{n+1}$ a např. Věta 10.3.10 dává pro $m \in \mathbb{N}$ nerovnosti $I_{2m} \ge I_{2m+1} \ge I_{2m+2}$, tj. podle (10.23), (10.24)

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}\,\frac{\pi}{2} \ge \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2m+1)} \ge \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)(2m+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)(2m+2)}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odtud snadno dostaneme

$$\frac{\pi}{2} \ge \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \ge \frac{2m+1}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Z odvozených nerovností podle Věty 2.3.2 obdržíme při $m \to \infty$

$$\begin{aligned}\pi/2 &= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} = \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2m)\cdot(2m)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2m-1)\cdot(2m+1)}\,. \qquad (10.25)\end{aligned}$$

Násobíme-li zlomek vpravo výrazem $(2m+2)/(2m+1)$, který má pro $m \to \infty$ limitu 1, dostaneme

$$\pi/2 = \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ \ldots\ 2m\ \cdot\ 2m\ \cdot\ (2m+2)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots(2m-1)\cdot(2m+1)\cdot(2m+1)}\,. \qquad (10.26)$$

Oba tyto vzorce (10.25), (10.26) dávají tzv. *Wallisovu formuli.*

Historická poznámka 10.4.11. Vzorec odvodil John Wallis (1616 – 1703) r. 1655, avšak podstatně jiným způsobem než my v předchozí poznámce. Několik generací matematiků poválečného období se učilo analýzu převážně z učebnic Vojtěcha Jarníka (1897 – 1970). Jarník byl velmi zručný počtář a tak není divu, že početní partie jeho učebnic jsou skvěle napsány. Předcházející příklad a poznámka jsou nepatrně upraveny krácením textu jeho učebnice [3], str. 73.

10.5 Technika slepování

Poměrně často se setkáváme s případem, kdy nám existenční věta zajišťuje existenci primitivní funkce ke zkoumané funkci, ale početní metoda nám ji přímo neposkytuje. Pomineme-li případy, kdy tuto primitivní funkci neumíme pomocí nám známých funkcí vyjádřit (např. k funkcím $\exp(-x^2)$ či $(\log x)^{-1}$), zbudou ještě např. důležité případy vyžadující „lepení". Princip „lepení" primitivních funkcí si objasníme na jednoduchém příkladě.

Příklad 10.5.1. Označme

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \{2k; k \in \mathbb{Z}\})\,,$$

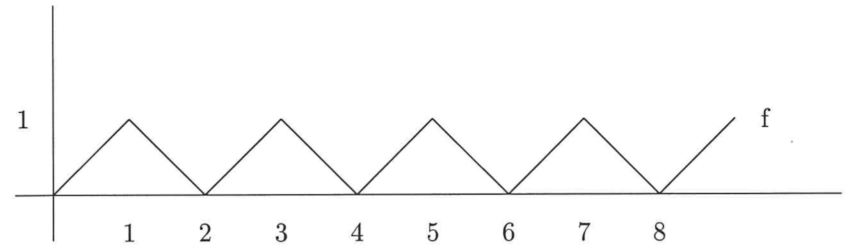
kde vzdálenost dist bodu x od množiny M je definována pomocí vzorce

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{|x-y|; y \in M\}\,.$$

Snadno nahlédneme, že platí

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,, & x &\in [0,1]\,, & f(x) &= 2-x\,, & x &\in [1,2]\,,\\ f(x) &= x-2\,, & x &\in [2,3]\,, & f(x) &= 4-x\,, & x &\in [3,4]\,,\ldots \end{aligned}$$

a že f je 2-periodická funkce na $\mathbb{R}$, jejíž graf znázorňuje následující obrázek.

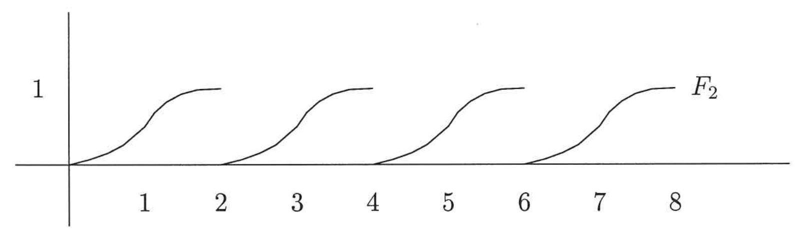


Obr. 1.

Bez obtíží spočteme, že $F(x) = x^2/2$, $x \in (0,1)$, je primitivní funkcí k funkci f na intervalu $(0,1)$ a $\lim_{x\to 1-} F(x) = \frac{1}{2}$. Pokud bychom nyní definovali funkci $G(x) = 2x - x^2/2$, $x \in (1,2)$, pak $\lim_{x\to 1+} G(x) = 3/2$. Proto dále položme $G_1(x) = G(x) - 1$ a definujme

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x)\,, & x \in (0,1)\,,\\ \frac{1}{2}\,, & x = 1\,,\\ G_1(x)\,, & x \in (1,2)\,. \end{cases}$$

Označme shodně F_1 2-periodické rozšíření právě definované funkce z intervalu $(0,2)$ na $\mathbb{R} \setminus \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$. Její graf je znázorněn na následujícím obrázku.



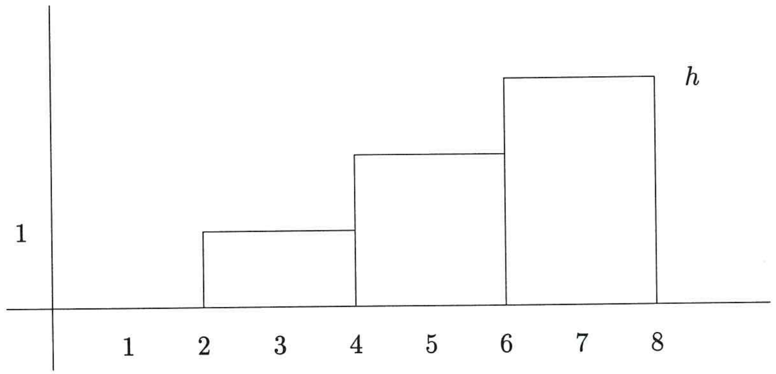
Obr. 2.

Nyní definujme po částech konstantní funkci h, jejíž „skok"

$$h(x+) - h(x-) = \lim_{t\to x+} h(t) - \lim_{t\to x-} h(t)$$

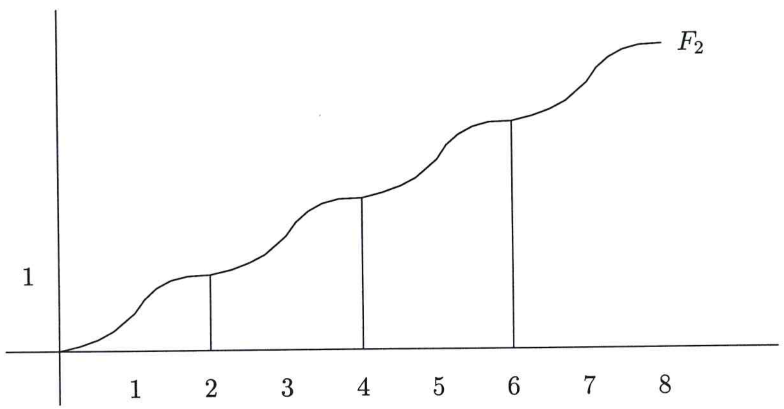
ve „zbývajících“ bodech $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, je jednotkový [8])

$$h(x) = \left[\frac{x}{2}\right].$$



Obr. 3.

Funkci $F_2 = F_1 + h$ již lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$ (hodnotami $h(2k) = k$, $k \in \mathbb{Z}$) a je to primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Zde „slepováním“ rozumíme nalezení h tak, aby po přičtení h bylo možno funkci $F_2 = F_1 + h$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$.



Obr. 4.

Obraťme se nyní k technicky složitějšímu příkladu, jehož řešení jsme odložili na pozdější dobu (srovnej s Příkladem 8.3.19). Poznamenejme, že s příklady tohoto typu se zpravidla programy typu *Mathematica*, nebo *Maple* [9]) (programy pro

[8]) Hranatá závorka opět značí funkci celá část.
[9]) Zde je nutno poznamenat, že relativně méně komplexní a nepoměrně lacinější *Derive* je zvládá.

„computer algebra“, což je nevhodný, nicméně standardizovaný název, který proto raději nepřeložíme) neumějí vyrovnat.

Příklad 10.5.2. Určete primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{10.27}$$

V Kapitole 8 v Příkladu 8.3.19 jsme se dostali až k vyjádření

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}} =: F(x) \tag{10.28}$$

pro $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nyní postupujeme dále jako v Příkladu 10.5.1. Spočteme limity

$$\lim_{x \to -\pi+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \lim_{x \to \pi-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Z výsledku plyne, že (zobecněný) přírůstek F na intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ činí $2\pi/\sqrt{3}$. Sestrojíme funkci

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right],$$

jejímž přičtením k nalezené funkci F získáme funkci F_1 na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, která mimo tyto body má za derivaci funkci f a která je *spojitě rozšiřitelná* na $\mathbb{R}$. Na libovolném omezeném intervalu (a, b) je toto spojité rozšíření F_2 zobecněnou primitivní funkcí k funkci f, a tedy i primitivní funkcí k f. V bodech „lepení“ to proto nemusíme ani ověřovat výpočtem. Proto je

$$F_2'(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkce F_2 je tedy spojitým rozšířením funkce

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\,\mathrm{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

na $\mathbb{R}$. Konečně každá jiná primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ se od F_2 liší jen o aditivní konstantu.

10.6 Existence Newtonova integrálu

Příklad 10.6.1. Ukažme *elementárně*, že existuje

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$