Poznámka 10.1.18. Je-li f stejnoměrně spojitá v I, je spojitá v každém bodě $x \in I$. Je-li obráceně f spojitá v každém bodě $x \in I$, pak pro každé x a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(x) > 0$ tak, že pro všechna $y \in I$, $|x-y| < \delta$ platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Zřejmě je tedy δ závislé na $x \in I$. Stejnoměrná spojitost funkce znamená, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje „univerzální δ“ takové, že je splněna podmínka spojitosti s tímto δ v každém bodě $x \in I$.

Věta 10.1.19 (Heine 1872). *Nechť $f \in C([a,b])$. Potom je f stejnoměrně spojitá v $[a,b]$.*

Důkaz. Nechť f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$; ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu. Pak totiž existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro *každé* $\delta > 0$ existují $x, y \in [a,b]$, pro něž platí

$$|x-y| < \delta \quad \text{a zároveň} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\,.$$

Tady k číslům $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existují body x_n, y_n tak, že

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon\,.$$

Protože $\{x_n\}$ je omezená posloupnost, existuje taková posloupnost $\{x_{n_k}\}$ z ní vybraná, že

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0\,, \quad \text{kde} \quad x_0 \in [a,b]\,.$$

Zřejmě platí i $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$ a je

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon\,.$$

Avšak f je spojitá v x_0, a platí tedy

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})\,,$$

což dává potřebný spor. Tím je tvrzení dokázáno. □

Historická poznámka 10.1.20. Cauchyho důkaz Lagrangeovy věty, který jsme volně reprodukovali v Historické poznámce 5.2.16 můžeme nyní okomentovat podrobněji. Místo **[1!]** je překonatelné díky stejnoměrné spojitosti derivace, ovšem jen při dnešní úrovni znalostí. Bez nich však zůstává v důkaze „díra“. Protože Cauchy předpokládal spojitost derivace (viz [Fl]) na $[a,b]$, mohl tedy použít Větu 4.3.33 (její tvrzení bylo pokládáno za zřejmé, a tak mohl překonat místo **[3!]** na úrovni soudobých představ, i když ne zcela korektně). Věta o nabývání extrémů, potřebná pro překonání **[2!]** byla korektně dokázána až později a bez spojitosti f' by neplatila.

Všimněme si ještě blíže stejnoměrné spojitosti, která je užitečná i v jiných souvislostech. Platí např. následující tvrzení:

Věta 10.1.21. *Funkce f je stejnoměrně spojitá v (a,b), právě když existuje její spojité rozšíření na $[a,b]$.*

Důkaz. Existuje-li spojité rozšíření f_1 funkce f na $[a,b]$, je f_1 stejnoměrně spojitá funkce a tedy i restrikce $f = f_1|(a,b)$ je stejnoměrně spojitá. Je-li f stejnoměrně spojitá, je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka z Věty 4.3.13 pro existenci vlastních limit

$$f(a) := \lim_{x\to a+} f(x)\,, \quad f(b) := \lim_{x\to b-} f(x)\,;$$

pomocí těchto hodnot je definováno spojité rozšíření f na $[a,b]$. □

10.2 Riemannův integrál

Po více než sto let po objevech ISAACA NEWTONA (1643 – 1727) byla integrace chápána převážně jako inverzní operace k derivování. Vztah k ploše pod grafem funkce byl také znám, ale teprve s vývojem znalostí se ukázalo, že je tuto plochu možno pomocí integrálu definovat.

Prvním, kdo se pokusil o moderní řešení problému integrace, byl Cauchy. Pracoval se *spojitou* funkcí na intervalu $[a,b]$; k popisu Cauchyho definice zavedeme pojem, který využijeme i v dalším výkladu.

Definice 10.2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\{x_k; k = 0, 1, \ldots, n\}$ je konečná množina bodů z intervalu $[a,b]$ takových, že je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Tuto množinu nazýváme *dělením* intervalu $[a,b]$; budeme pro dělení užívat stručnější zápis [2])

$$D := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}\,. \tag{10.2}$$

Intervaly $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, nazýváme *dělícími intervaly* dělení D. Číslo

$$\nu(D) := \max\{x_k - x_{k-1}; k = 1, \ldots, n\} \tag{10.3}$$

se nazývá *norma dělení D*.

Historická poznámka 10.2.2. Uvedeme nejprve původní definici integrálu, kterou používal Cauchy. I když je definice zcela obecná, užíval ji prakticky pouze pro *spojité* funkce.

[2]) Čtenář by si měl uvědomit, že jsme se seznámili s další licencí. Dělení intervalu je jeho konečná podmnožina včetně uspořádání, přičemž její extrémy splývají s krajními body intervalu.

Definice 10.2.3 (Cauchy 1823). Funkce f se nazývá *integrovatelná* (dle Cauchyho) na intervalu $[a,b]$ a hodnota jejího integrálu je rovna číslu $V \in \mathbb{R}$, jestliže platí: pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\nu(D) < \delta \Rightarrow \left| V - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon .$$

Je-li splněna tato podmínka, definujeme [3])

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := V .$$

Později se začal problémem integrace zabývat Bernhard Riemann (1826 – 1866), kterému vděčíme za jiný zorný úhel pohledu: nepředpokládal à priori, že funkce f, kterou chceme integrovat, je „pěkná" (např. spojitá); kladl si naopak otázku, jaké „minimální" vlastnosti funkcí zaručují jejich integrabilitu. Jeho přístup se dále vyvíjel, až dosáhl dnešní, do jisté míry standardizované, podoby; tento postup použijeme pro další výklad.

V dalším vždy předpokládáme, že funkce, se kterými pracujeme, jsou *omezené na intervalu* $[a,b]$.

Definice 10.2.4. Označme nejprve $m := \inf\{f(x); x \in [a,b]\}$ a položme dále $M := \sup\{f(x); x \in [a,b]\}$. Pro dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$ nechť

$$m_k := \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k := \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\} . \tag{10.4}$$

Definujme

$$s(f;D) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad S(f;D) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) . \tag{10.5}$$

Čísla $s(f;D)$ a $S(f;D)$ se nazývají *dolní* a *horní součet* pro funkci f a dělení D.

Lemma 10.2.5. *Pro libovolnou omezenou funkci f a libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ platí*

$$m(b-a) \le s(f;D) \le S(f;D) \le M(b-a) .$$

Důkaz. Nerovnosti dostaneme sečtením nerovností

$$m \le m_k \le M_k \le M$$

násobených čísly $(x_k - x_{k-1})$ pro $k = 1, \ldots, n$. □

[3]) Dá se ukázat, že pak je V určeno jednoznačně.

Označení 10.2.6. Všechna dělení D intervalu $[a,b]$ tvoří systém, který budeme značit $\mathcal{D}(a,b)$. Je-li $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$, pak

$$D_1 \prec D_2 , \text{ platí-li } D_1 \subset D_2$$

(dělení D_1, D_2 jsou tedy částečně uspořádána pomocí *inkluze* množin jejich dělících bodů). Dělení D_2 se nazývá *zjemnění* dělení D_1. Je-li $D_1 \prec D$, $D_2 \prec D$, kde D, D_1, $D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$, nazývá se D *společným zjemněním* dělení D_1 a D_2.

Lemma 10.2.7. *Je-li $D_1 \prec D_2$, pak pro omezenou f na $[a,b]$ platí*

$$s(f;D_1) \le s(f;D_2) \le S(f;D_2) \le S(f;D_1) .$$

Důkaz. Nechť $D_1 = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \in \mathcal{D}(a,b)$. Je-li $D_2 = D_1 \cup \{x^*\}$ a x^* není dělícím bodem D_1, pak existuje takové k, že $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$. Pak zřejmě platí

$$\begin{aligned}\sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x^*]\}\,(x^* - x_{k-1}) + \sup\{f(x); x \in [x^*, x_k]\}\,(x_k - x^*) \le \\ \le M_k(x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

a ostatní členy konečných součtů, definujících příslušné horní součty, se nemění. Obecně lze přechod od D_1 k D_2 provést postupným přidáváním konečně mnoha bodů z $D_2 \setminus D_1$ a analogickou úvahou jako výše. Stejně se dokáže i nerovnost pro dolní součty; zbytek je již zřejmý. □

Lemma 10.2.8. *Pro libovolná dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$ a libovolnou omezenou funkci f na $[a,b]$ platí*

$$s(f;D_1) \le S(f;D_2) . \tag{10.6}$$

Důkaz. Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2 (např. lze položit $D = D_1 \cup D_2$; smysl je zřejmý), pak platí

$$s(f;D_1) \le s(f;D) \le S(f;D) \le S(f;D_2) ,$$

což dává nerovnost z tvrzení. □

Definice 10.2.9 (Riemann 1854, Darboux 1875). Označme pro každou (dle úmluvy omezenou) funkci f definovanou na intervalu $[a,b]$

$$\begin{aligned} I_h(f;a,b) &= \inf\{S(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\} , \\ I_d(f;a,b) &= \sup\{s(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\} . \end{aligned}$$

Platí-li $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b)$, pak definujeme $I(f;a,b) := I_d(f;a,b)$ a nazýváme hodnotu $I(f;a,b)$ *Riemannův integrál funkce f na intervalu* $[a,b]$. Píšeme pak

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := I(f;a,b) .$$

Čísla $I_h(f;a,b)$ a $I_d(f;a,b)$ se nazývají *horní* a *dolní Riemannův integrál*; pokud $I_h(f;a,b)$ a $I_d(f;a,b)$ nesplynou, pak říkáme, že Riemannův integrál funkce f na intervalu $[a,b]$ neexistuje.

Poznámka 10.2.10. Zřejmě platí $I_d(f;a,b) \le I_h(f;a,b)$, což dostaneme z (10.6) přechodem k supremu přes $\mathcal{D}(a,b)$ na levé straně (10.6) a pak přechodem k infimu přes $\mathcal{D}(a,b)$ na pravé straně (10.6). Riemannův integrál nám dá možnost definovat funkcionál $P(f;a,b)$ z úlohy o ploše tak, že jsou splněny všechny potřebné podmínky (vlastnosti) pro plochu P, které jsme formulovali.

Načrtnete-li si pár ilustrativních obrázků, snadno nahlédnete, že horní a dolní součty jsou *přirozenými* odhady plochy $P(f;a,b)$. Můžeme na ně pohlížet též jako na integrály speciálních po částech konstantních funkcí, které shora či zdola omezují funkci f. V dalším textu budeme v celém tomto oddílu vynechávat $(\mathcal{R})$ před znamením integrálu.

Historická poznámka 10.2.11. Již jsme se zmínili o tom, že vedeme výklad přes modifikovanou definici Riemannova integrálu; jeho autorem je Darboux. Riemannův přístup přiblížíme přímo citátem z jeho habilitační práce *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* z r. 1853 (podrobněji viz např. [6], str. 59).

„Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)\,dx$?

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ a označme kvůli krátkosti $x_1 - a$ znakem δ_1, $x_2 - x_1$ znakem δ_2, …, $b - x_{n-1}$ znakem δ_n a buď ε kladný pravý zlomek. Potom hodnota součtu

$$S = \delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\varepsilon_3\delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

bude záviset na volbě parametrů δ a veličin ε. Bude-li nyní mít (*ten součet*) tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit pevné hranici A, jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota (*tj.* A) nazývá $\int_a^b f(x)\,dx$.

Když tuto vlastnost nemá, pak nemá $\int_a^b f(x)\,dx$ význam."

Srovnáme-li nyní Cauchyho definici a Riemannovu definici, bere Riemann při vyčíslení součtu hodnoty f nikoli v *počátečních* bodech dělících intervalů, ale v libovolně zvolených bodech $x_{k-1} + \varepsilon_k\delta_k$ těchto intervalů, a požaduje, aby po limitním přechodu vzhledem k normě dělení výsledná limita existovala a nezávisela na jejich volbě. Nazveme-li součty tohoto typu *integrálními součty*, tj. položíme-li pro libovolné dělení $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ intervalu $[a,b]$ a $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, takové, že je $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$,

$$\sigma(f;D,\zeta) := \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

platí zřejmě pro všechna dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$

$$s(f;D) \le \sigma(f;D,\zeta) \le S(f;D).$$

Není obtížné si rozmyslit, že oba popsané přístupy (tj. Riemannův i modifikace Darbouxova) vedou k témuž pojmu.

Věta 10.2.12 (Du Bois Reymond 1875, Darboux 1875). *Nechť f je omezená funkce na intervalu $[a,b]$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že platí*

$$S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon, \tag{10.7}$$

právě když existuje Riemannův integrál

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{10.8}$$

Důkaz. Pokud existuje integrál, lze sestrojit dělení D_1^n, D_2^n, $n = 1,2,\dots$, tak, že posloupnost $\{s(f;D_1^n)\}$ je neklesající, posloupnost $\{S(f;D_2^n)\}$ nerostoucí a platí

$$s(f;D_1^n) \to I_d(f;a,b), \quad S(f;D_2^n) \to I_h(f;a,b).$$

Pro společná zjemnění D^n, $D_1^n \prec D^n$, $D_2^n \prec D^n$, $n \in \mathbb{N}$, pak platí

$$S(f;D^n) - s(f;D^n) \to I_h(f;a,b) - I_d(f;a,b) = 0,$$

z čehož plyne uvedená podmínka. Je-li naopak splněna tato podmínka, pak platí

$$I_h(f;a,b) - I_d(f;a,b) < \varepsilon$$

pro všechna $\varepsilon > 0$ a zbytek je zřejmý. □

Příklad 10.2.13. Nechť platí $m \in \mathbb{N}$, $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, $A \subset [a,b]$, a nechť $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a,b] \setminus A$. Potom platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Zvolme pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové dělení $D_n \in \mathcal{D}(a,b)$, aby pro $k = 1,\dots,n$ platilo $x_k - x_{k-1} = \nu(D_n) = (b-a)/n$; takové dělení, kterému se říká *ekvidistantní dělení*, je jednoznačně určeno. Označme $M = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$. Potom každý z bodů $x_1, \dots, x_m$ leží nejvýše ve dvou dělících intervalech dělení D a platí

$$\lim_{n\to\infty} s(f;D_n) \ge \lim_{n\to\infty} (-2Mm(b-a)/n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f;D_n) \le \lim_{n\to\infty} (2Mm(b-a)/n) = 0,$$

a tedy i

$$\lim_{n\to\infty} (S(f;D_n) - s(f;D_n)) = 0.$$

Odtud plyne, že zkoumaný integrál existuje a jeho hodnota je rovna 0.

Příklady 10.2.14. 1. Je-li δ charakteristická funkce $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$, pak *neexistuje* Riemannův integrál funkce δ přes interval $[0,1]$. Skutečně, platí

$$s(\delta;D) = 0 < 1 = S(\delta;D)$$

pro libovolně zvolené $D \in \mathcal{D}(0,1)$, a tedy $I_d(\delta;0,1) = 0$, $I_h(\delta;0,1) = 1$. Jak již víme, funkce δ je známa pod jménem Dirichletova funkce.

2. Nechť ϱ je Riemannova funkce, definovaná v Příkladu 4.2.9. Potom platí

$$\int_0^1 \varrho(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Zřejmě je $s(\varrho,D) = 0$ pro všechna $D \in \mathcal{D}(0,1)$. Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in [0,1];\ \varrho(x) > \varepsilon\}$ konečná. Zvolme $\varepsilon > 0$. Rovnost bude dokázána, jestliže popíšeme konstrukci dělení D takového, aby $S(\varrho,D) < \varepsilon$. Lze např. postupovat jako v Příkladu 10.2.13 a stejným obratem pro ekvidistantní dělení $D_n \in \mathcal{D}(0,1)$ intervalu $[0,1]$ na n dělících intervalů ($n \in \mathbb{N}$) dokázat, že $\lim_{n\to\infty} S(\varrho;D_n) = 0$. Detaily důkazu přenecháme čtenáři k rozmyšlení. Je vhodné si povšimnout, že funkce δ není spojitá v žádném bodě intervalu $[0,1]$, zatímco ϱ je spojitá ve všech bodech množiny $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Věta 10.2.15. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a nechť je splněna aspoň jedna z podmínek*

$$(1)\quad f \in \mathcal{C}([a,b])\,, \qquad (2)\quad f \textit{ je monotónní na } [a,b]\,.$$

Potom integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Důkaz. V obou případech je funkce f zřejmě omezená na $[a,b]$. Je-li $\nu(D)$ norma dělení D (viz (10.3)) a m_k, M_k jsou definovány jako v (10.4), pak

$$S(f;D) - s(f;D) \le \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\cdot \nu(D)\,.$$

Je-li nyní například f neklesající na $[a,b]$, pak lze $\nu(D)$ ze součtu vpravo vytknout a výraz vlevo odhadnout shora číslem $\nu(D)\cdot(M-m) = \nu(D)(f(b) - f(a))$ [4]. Protože lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ volit $\nu(D)$ tak, že $\nu(D)(f(b)-f(a)) < \varepsilon$, platí tvrzení podle Věty 10.2.12. Uvažujme případ f spojité na $[a,b]$. Potom je f podle Věty 10.1.19 i stejnoměrně spojitá v $[a,b]$ a lze k $\varepsilon > 0$ volit $\delta > 0$ tak, že pro $x,y \in [a,b]$

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

[4]) V obecném případě odhadneme pomocí $\nu(D)\,|f(b) - f(a)|$.

Odtud ale plyne, že pro každé dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, platí

$$S(f;D) - s(f;D) \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)\,.$$

Odtud opět plyne existence integrálu pomocí Věty 10.2.12. □

Poznámka 10.2.16. Zamysleme se nad Příklady 10.2.14. Množina $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ je dosti velká v tom smyslu, že každý (otevřený) interval $I \subset [0,1]$ obsahuje dokonce nekonečně mnoho bodů množiny A. Je však zároveň v jistém smyslu *malá*, neboť ji lze pokrýt *spočetným* systémem (otevřených) intervalů, součet jejichž délek je libovolně malý. Skutečně, seřadíme-li prvky A do prosté posloupnosti $\{r_n\}$ a zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, lze položit $I_1 = (r_1 - \varepsilon/2^2, r_1 + \varepsilon/2^2)$ a obecně pro $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = (r_n - \varepsilon/2^{n+1}, r_n + \varepsilon/2^{n+1})\,.$$

Systém intervalů $\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ zřejmě pokrývá A. Protože délka d_n intervalu I_n je rovna $\varepsilon/2^n$, platí

$$\sum d_n = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{1-1/2} = \varepsilon\,,$$

a tedy je součet délek všech intervalů I_n libovolně malý. To nás vede k pojmu, který nyní budeme definovat.

Definice 10.2.17. Je-li $A \subset \mathbb{R}$ taková, že existuje její pokrytí spočetně mnoha otevřenými intervaly o libovolně malém součtu délek, říkáme, že A má *nulovou (Lebesgueovu) míru*. Zapisujeme to pomocí vztahu $\lambda(A) = 0$.

Poznámka 10.2.18. Lebesgueova míra λ je zobecněním délky intervalu, takže platí $\lambda(I) = b - a$ pro jakýkoli interval o koncových bodech a, b. Je to pojem dosti složitý, zatím vystačíme pouze s předcházející definicí. Platí následující věta, kterou *nebudeme* dokazovat, popisující jinou nutnou a postačující podmínku pro existenci Riemannova integrálu. Věta v podstatě pochází již od Riemanna, i když pojem míry se konstituoval mnohem později. V uvedené verzi ji dokázal Henri Louis Lebesgue (1875 – 1941) v práci [4] z r. 1904. Poznamenejme, že zajímavější je pro případ vícerozměrné integrace.

Věta 10.2.19. *Nechť funkce f je definována na intervalu $[a,b]$. Potom existuje Riemannův integrál z f na $[a,b]$, právě když má množina bodů D nespojitosti funkce f v $[a,b]$ nulovou míru.*

Příklad 10.2.20. Je vcelku zřejmé, že je-li $A \subset [a,b]$ *libovolná spočetná množina*, má nulovou míru. Předvedený důkaz, který jsme použili pro speciální množinu A, lze beze změny provést pro *obecnou* množinu A.

Snadno lze též definovat funkci f na $[a,b]$ tak, že není spojitá *právě v bodech* množiny A. Stačí vytvořit prostou posloupnost $\{x_n\}$ všech bodů A a pro libovolnou nerostoucí posloupnost čísel $a_n > 0$, $a_n \to 0$ definovat $f(x_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in ([a,b] \setminus A)$. Takto definovaná funkce se někdy nazývá *zobecněná Riemannova funkce*. Není obtížné dokázat (podobným způsobem jako pro Riemannovu funkci, dokonce jednodušeji), že takto definovaná funkce má na $[a,b]$ nulový integrál.

Označení 10.2.21. Označme $\mathcal{R}(a,b)$ [5]) množinu všech (omezených) funkcí definovaných na intervalu $[a,b]$, pro které existuje Riemannův integrál na intervalu $[a,b]$. V dalších tvrzeních odvodíme vlastnosti tohoto integrálu, které budeme později interpretovat ve formě následujícího jednoduchého tvrzení o funkcionálu, tj. zobrazení

$$A : f \mapsto (\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad f \in \mathcal{R}(a,b)\,. \tag{10.9}$$

Věta 10.2.22. *Riemannův integrál (přesněji: funkcionál A definovaný vztahem (10.9)) je nezáporným lineárním funkcionálem na lineárním prostoru $\mathcal{R}(a,b)$.*

Lemma 10.2.23. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, $f \geq 0$, pak také platí $A(f) \geq 0$.*

Důkaz. Jelikož jsou zřejmě všechny dolní součty $s(f;D)$, $D \in \mathcal{R}(a,b)$, nezáporné, je nezáporné i jejich supremum, tj. $A(f)$. □

Věta 10.2.24. *Nechť $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom též platí $f+g \in \mathcal{R}(a,b)$ a*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.10}$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí implikace

$$f,g \in \mathcal{R}(a,b) \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}(a,b)\,.$$

Uvažujme dělící intervaly $[x_{k-1},x_k]$ dělení $D = \{x_0 < \cdots < x_n\}$. Pro ně platí pro každé $k = 1,\ldots,n$

$$\sup\{f(x)+g(x)\} \leq \sup\{f(x)\} + \sup\{g(x)\}\,,$$

kde supremum bereme vzhledem k intervalu $[x_{k-1},x_k]$. Analogické nerovnosti lze dokázat pro infimum. Z nerovností snadno dostaneme

$$s(f;D)+s(g;D) \leq s(f+g;D) \leq S(f+g;D) \leq S(f;D)+S(g;D)\,, \tag{10.11}$$

z čehož vyplývá odhad

$$S(f+g;D) - s(f+g;D) \leq (S(f;D)-s(f;D)) + (S(g;D)-s(g;D))\,.$$

Odtud pomocí Věty 10.2.12 dostaneme dokazovanou implikaci. Rovnost (10.10) dostaneme snadno z (10.11) přechodem k supremu na levé straně nerovnosti a pak k infimu na pravé straně nerovnosti, vždy přes množinu všech dělení $\mathcal{D}(a,b)$. □

Věta 10.2.25. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom pro všechna $c \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.12}$$

[5]) Nepíšeme $\mathcal{R}([a,b])$, neboť $\mathcal{R}(a,b)$ je stručnější. Viz také Poznámka 10.2.31.

Důkaz. Tvrzení zřejmě platí pro $c = 0$. Pro $c > 0$ platí dále rovnosti

$$S(cf;D) = cS(f;D)\,, \quad \text{a} \quad s(cf;D) = cs(f;D)\,.$$

Je-li $c < 0$, platí $S(cf;D) = cs(f;D)$ a $s(cf;D) = cS(f;D)$. Odtud již snadno obdržíme (10.12). □

Lemma 10.2.26. *Funkcionál A je* neklesající, *tj. pro $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$ platí*

$$f \leq g \Rightarrow A(f) \leq A(g)\,.$$

Důkaz. Jsou-li $f,g \in \mathcal{R}(a,b)$, pak z Vět 10.2.24 a 10.2.25 vyplývá, že rovněž platí $(g-f) \in \mathcal{R}(a,b)$. Z $(g-f) \geq 0$ plyne podle Věty 10.2.23 a Věty 10.2.24 i nerovnost $A(g)-A(f) = A(g-f) \geq 0$, čímž je tvrzení dokázáno. □

Monotonie funkcionálu A má jeden zajímavý důsledek. Nejprve připomeneme již dříve užívané označení.

Označení 10.2.27. Pro $a \in \mathbb{R}$ jsme zavedli v Poznámce 1.3.15 jeho kladnou a zápornou část. Podobně zavádíme pro funkci f *kladnou část funkce* f a *zápornou část funkce* f vztahy

$$f^+ : x \mapsto (f(x))^+\,, \quad f^- : x \mapsto (f(x))^-\,, \quad x \in D_f\,.$$

Snadno nahlédneme, že platí

$$f^+ = \frac{|f|+f}{2}\,, \quad f^- = \frac{|f|-f}{2}\,,\,, \quad f = f^+ - f^-\,, \quad |f| = f^+ + f^-\,.$$

kde f^+ je kladná část funkce f a f^- je záporná část funkce f. Rozklad tohoto typu užijeme ještě vícekrát.

Lemma 10.2.28. *Jestliže platí $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak také f^+, f^- a $|f|$ jsou z $\mathcal{R}(a,b)$.*

Důkaz. Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ platí

$$S(f^+;D) - s(f^+;D) \leq S(f;D) - s(f;D)\,,$$
$$S(f^-;D) - s(f^-;D) \leq S(f;D) - s(f;D)\,.$$

S použitím Věty 10.2.12 a předcházející věty o linearitě dostaneme odsud integrabilitu funkcí f^+, f^- a $|f|$. □

Z monotonie integrálu a nerovnosti $-|f| \leq f \leq |f|$ dostaneme snadno integrací následující důsledek:

Důsledek 10.2.29. *Pro každou $f \in \mathcal{R}(a,b)$ platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,. \tag{10.13}$$

Speciálně pro $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\,. \qquad (10.14)$$

Poznámka 10.2.30. Nerovnost (10.14) má názorný charakter a v Kapitole 12 o metrických prostorech se k ní v Poznámce 12.5.4 vrátíme. Všimněte si, že jestliže se „integrálně" *málo liší* funkce f a g, tj. číslo na pravé straně nerovnosti (10.14) je malé, pak je rozdíl jejich Riemannových integrálů rovněž malý. Dále pokud např. platí $|f-g| < \varepsilon$ na $[a,b]$, lze integrál vlevo v (10.14) odhadnout číslem $\varepsilon(b-a)$.

Poznámka 10.2.31. Jestliže je $g \in \mathcal{R}(a,b)$ a f je libovolná funkce na $[a,b]$, která nabývá nenulových hodnot pouze na *konečné* množině $A \subset [a,b]$, pak je též $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a s přihlédnutím k výsledku Příkladu 10.2.13 platí pro $h = g + f$

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x)+f(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Zhruba řečeno, změna hodnot funkce g v konečně mnoha bodech tedy neovlivní ani existenci ani hodnotu jejího integrálu (ve skutečnosti jde o integrál z jiné funkce!). Není složité si rozmyslet, že můžeme pracovat i s Riemannovým integrálem pro omezené funkce definované na *omezeném* intervalu o koncových bodech a, b tak, že je libovolným způsobem rozšíříme na interval $[a,b]$. Z hlediska Riemannova integrálu se rozšířené funkce od původních „neliší". Lze dokonce pracovat s funkcemi, z nichž každá je definována všude v $[a,b]$ mimo nějakou konečnou množinu. Této konvence užívat *nebudeme*, na možnost jejího použití pouze čtenáře upozorňujeme.

Při motivačních úvahách k Newtonovu integrálu jsme pracovali s názornými vlastnostmi obsahu „podgrafu nezáporné spojité funkce". Ukážeme, že lze tento obsah realizovat pomocí Riemannova integrálu. Je zřejmé, že Riemannův integrál má vlastnosti nezápornosti, monotonie a dává očekávaný výsledek pro konstantní funkce. Stačí tedy dokázat *aditivitu vůči oboru*.

Lemma 10.2.32. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom pro každý interval $[c,d] \subset [a,b]$ platí $f \in \mathcal{R}(c,d)$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že pro f a D platí (10.7). Označme $D' = (D \cup \{c,d\}) \cap [c,d]$ [6]. Pak také platí $S(f;D') - s(f;D') < \varepsilon$ pro $D' \in \mathcal{D}(c,d)$, což dává žádané tvrzení. □

Věta 10.2.33. *Nechť $a < c < b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, a nechť f je funkce definovaná na $[a,b]$. Potom platí*

$$f \in \mathcal{R}(a,c) \wedge f \in \mathcal{R}(c,b) \iff f \in \mathcal{R}(a,b) \qquad (10.15)$$

[6]) Zde i dále si čtenář musí opět rozmyslit, že konečnou množinu určující D' seřadíme vzestupně, „přečíslujeme" a tak získáme D'.

a také rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (10.16)$$

Důkaz. Existuje-li integrál na levě straně (10.16), pak podle Lemmatu 10.2.32 existují i oba integrály na pravé straně této nerovnosti. Existují-li oba integrály na pravé straně (10.16), pak k $\varepsilon > 0$ lze nalézt $D' \in \mathcal{D}(a,c)$ a $D'' \in \mathcal{D}(c,b)$ tak, že

$$S(f;D') - s(f;D') < \varepsilon/2 \quad \text{a} \quad S(f;D'') - s(f;D'') < \varepsilon/2\,.$$

Sestrojíme dělení $D = D' \cup D'' \in \mathcal{D}(a,b)$. Potom též

$$S(f;D) - s(f;D) = (S(f;D') - s(f;D')) + (S(f;D'') - s(f;D'')) < \varepsilon\,.$$

Platí tedy (10.15). Dále lze ke každému dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$ sestrojit „přidáním" bodu c takovou dvojici dělení $D' \in \mathcal{D}(a,c)$ a $D'' \in \mathcal{D}(c,b)$, že pak platí jednak $D = D' \cup D'' \in \mathcal{D}(a,b)$ a také

$$S(f;D) = S(f;D') + S(f;D'')\,, \qquad s(f;D) = s(f;D') + s(f;D'')\,.$$

Sestrojíme-li nyní posloupnost dělení $D_n \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že

$$S(f;D_n) - s(f;D_n) \to 0\,,$$

a k D_n obdobně zkonstruujeme $D_n' \in \mathcal{D}(a,c)$ a $D_n'' \in \mathcal{D}(c,b)$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S(f;D_n) = \lim_{n\to\infty} (S(f;D_n') + S(f;D_n'')) = \\ &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Tím je důkaz Věty 10.2.33 dokončen. □

Definice 10.2.34. Až dosud jsme vždy integrovali přes interval $[a,b]$ za předpokladu, že platilo $a < b$. Jeví se účelné definovat

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

a také

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

pokud je $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Poznámka 10.2.35. Čtenář si může rozmyslit, že díky této úmluvě platí vzorec (10.16) pro libovolnou vzájemnou polohu bodů a, b, c, jakmile existuje Riemannův integrál na nejdelším z intervalů, na kterých se ve vzorci integruje.

Z úvahy, kterou jsme dělali v úloze o ploše na začátku Kapitoly 8, vyplývá, že funkce

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je pro spojitou nezápornou $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *primitivní funkcí* k f. Provedeme prakticky stejnou úvahu za obecnějších předpokladů.

Věta 10.2.36. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, $a < c < b$ a c je bod spojitosti f. Potom pro funkci*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \; x \in [a,b]\,, \quad \textit{platí} \quad F'(c) = f(c)\,.$$

Analogicky pro funkci

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,, \; x \in [a,b]\,, \quad \textit{platí} \quad G'(c) = -f(c)\,.$$

Důkaz. Z $f \in \mathcal{R}(a,b)$ vyplývá podle Lemmatu 10.2.32, že funkce F i G jsou definovány na $[a,b]$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti f v bodě c dostáváme existenci takového $\delta > 0$, že je $c + \delta < b$ a pro všechna $t \in [c, c+\delta]$, $h \in (0,\delta)$, platí jednak

$$\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

a dále

$$\begin{array}{rcccl} f(c) - \varepsilon & \leq & f(t) & \leq & f(c) + \varepsilon\,, \text{ a tedy} \\ -\varepsilon & \leq & f(t) - f(c) & \leq & +\varepsilon\,, \\ -\varepsilon h & \leq & \displaystyle\int_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t & \leq & \varepsilon h\,. \end{array}$$

Odtud dostaneme jednoduchou úpravou

$$-\varepsilon h \leq F(c+h) - F(c) - f(c)h \leq \varepsilon h\,,$$

a posléze i nerovnost

$$|(F(c+h) - F(c))/h - f(c)| \leq \varepsilon\,. \tag{10.17}$$

Obdobnou úvahu můžeme provést i pro $h < 0$ a dospět tak pomocí integrace na intervalu $[c+h, c,]$ k nerovnosti

$$-\varepsilon|h| \leq (F(c) - F(c+h)) - f(c)|h| \leq \varepsilon|h|\,,$$

z níž opět dostaneme (10.17) i pro $h < 0$. Odhad (10.17) tedy platí pro všechna $h \in \mathcal{P}_\delta(c)$ s vhodným $\delta > 0$. Případ s funkcí G se dokáže analogicky. □

Nyní již lze dokázat Větu 8.1.6, kterou jsme dosud užívali bez důkazu:

Věta 10.2.37 (Cauchy 1823). *Nechť $f \in \mathcal{C}(a,b)$, kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je libovolný otevřený interval. Potom existuje primitivní funkce F k funkci f na (a,b).*

Důkaz. Zvolme libovolné $x_0 \in (a,b)$ a definujme (srovnejte s Definicí 10.2.34)

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in (a,b)\,. \tag{10.18}$$

Přitom existence integrálu pro všechna $x \in (a,b)$ je důsledkem spojitosti f. Je-li $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, platí rovnost $F'(x) = f(x)$ podle Věty 10.2.36. Dále zvolme $c \in (a,b)$, $c < x_0$. Potom pro

$$F_1(x) := \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{platí} \quad F(x) = F_1(x) + \int_{x_0}^c f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in (a,b)\,,$$

takže rozdíl $F - F_1$ je konstantní funkce a podle Věty 10.2.36 platí rovnost $F'(x_0) = F_1'(x_0) = f(x_0)$. □

Poznámka 10.2.38. Je užitečné si uvědomit, jak volba bodu x_0 v předcházející větě souvisí s aditivní konstantou, až na kterou je primitivní funkce jednoznačně určena. Pomocí (10.18) definujeme tu primitivní funkci F k f, pro kterou platí $F(x_0) = 0$.

Lemma 10.2.39. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom existuje $M < \infty$ tak, že pro libovolné dva body $x, y \in (a,b)$ platí*

$$\left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq M|x - y|\,. \tag{10.19}$$

Je-li speciálně funkce f z Věty 10.2.37 omezená, je primitivní funkce definovaná vzorcem (10.18) stejnoměrně spojitá na (a,b).

Důkaz. Je-li $|f| \leq M$ na $[a,b]$, pak je odhad (10.19) jednoduchým důsledkem (10.13) z Lemmatu 10.2.29. □