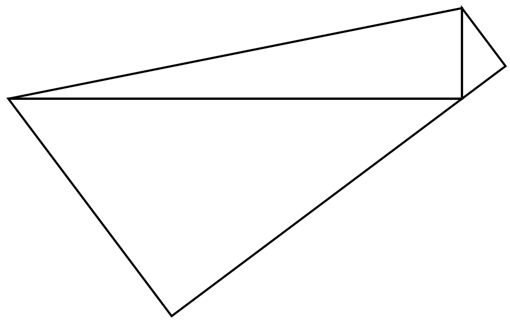
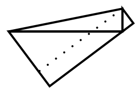
Úlohy na goniometrické funkce
(středoškolské)

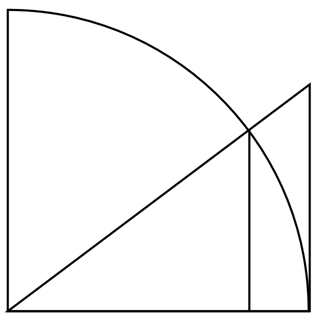
1. Na obrázku vidíte tři pravoúhlé trojúhelníky. Velikosti úhlů nalevo označte α, β a pomocí α, β vyjádřete velikosti odvěsen těchto tří trojúhelníků, víte-li, že největší přepona má jednotkovou délku.



2. Použijte výsledky předchozího příkladu k odvození součtových vzorců pro sinus a kosinus.

   NÁVOD: Do obrázku nahoře dokreslete odvěsnu: 

3. Na obrázku je čtvrtkruh o jednotkovém poloměru a dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. Označte velikost společného úhlu těchto trojúhelníků φ a vyjádřete obsahy trojúhelníků jako funkci proměnné φ. Trojúhelníky vytínají na čtvrtkruhu výseč, vyjádřete obsah této výseče jako funkci proměnné φ. Z odvozených obsahů sestavte dvě nerovnosti a z každé nerovnosti vyjádřete odhad pro podíl $(\sin\varphi)/\varphi$.



4. Odvoďte z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici hodnoty goniometrických funkcí v bodech 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $4\pi/3$, $7\pi/4$, $25\pi/6$.

5. Zjistěte, které číslo je větší, aniž byste je vyčíslili

   (a) $A_1 = \cos 20°, \quad A_2 = \cos 30°$
   (b) $B_1 = \sin 100°, \quad B_2 = \cos 30°$
   (c) $C_1 = 2^{-\sin 100°}, \quad C_2 = 2^{-\cos 30°}$
   (d) $D_1 = \cos 1, \quad D_2 = \cos 2$
   (e) $E_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 1}}, \quad E_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1+\cos 2}}$
   (f) $F_1 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 1}}, \quad F_2 = \frac{1}{1-\sqrt{1+\cos 2}}$

6. Vypočtěte hodnoty ostatních goniometrických funkcí v bodě x, aniž byste vyčíslili x. Výsledky nevyčíslujte, nechte je v přesném tvaru s odmocninami a upravte je. Pod ostatními funkcemi míníme sin, cos, tg, cotg.

   (a) $\sin x = \frac{1}{3}, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$
   (b) $\cos x = \frac{1}{4}, \quad x \in \langle \pi, 2\pi \rangle$
   (c) $\operatorname{cotg} x = 2, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$
   (d) $\cos 2x = \frac{1}{4}, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$
   (e) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{3}, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$
   (f) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -4, \quad x \in \langle -\pi, \pi \rangle$

(*7) Ukažte, že pro libovolnou dvojici funkcí c, s platí: splňují-li na $\mathbb{R}$ vztahy

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \tag{1}$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \tag{2}$$
$$(s(x))^2 + (c(x))^2 = 1 \tag{3}$$

pak splňují na $\mathbb{R}$ i vztahy

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$$
$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

Poznámky:
Pro dvojici nenulových funkcí platí i opačná implikace.
Z úlohy plyne souvislost mezi zavedením goniometrických funkcí na přednášce a použitím věty 6.6.3 z [JV].

*8. Nalezněte dvojici funkcí c, s různou od dvojice sinus a kosinus a splňující součtové vzorce

$$\begin{aligned} s(x+y) &= s(x)c(y) + c(x)s(y) \\ c(x+y) &= c(x)c(y) - s(x)s(y) \end{aligned}$$

Poznámka: Odtud a z výše citované věty 6.6.3 plyne, že v předchozí úloze není možné vynechat vztah (3).

9. Ze součtových vzorců (1), (2) a vztahu (3) odvoďte vzorce pro sinus a kosinus dvojnásobného a polovičního argumentu.

10. Odvoďte následující vzorce z definice goniometrických funkcí na jednotkové kružnici.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \cos(x+\pi/2) = -\sin x$$