Riemannův integrál

Motivace

Chceme vypočíst, nebo alespoň odhadnout, obsah množiny

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x - x^2\}$$

Při výpočtu jsme použili vlastnosti obsahu

(i) Obsah obdélníku O o stranách a, b je roven $S(O) = ab$.

(ii) Mají-li množiny M_1, M_2 prázdný průnik, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak je obsah jejich sjednocení roven součtu jejich obsahů

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) \tag{1}$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivita obsahu*.

Vztah (1) platí i v případě, že je průnik množin neprázdný, ale má nulový obsah. Například, když mají dva obdélníky společnou stranu. V obecném případě platí

$$S(M_1 \cup M_2) = S(M_1) + S(M_2) - S(M_1 \cap M_2)$$

(iii) Je-li $M_1 \subset M_2$, pak je $S(M_1) \leq S(M_2)$.

Tuto vlastnost nazýváme *monotonie obsahu*.

Při definici Riemannova integrálu budeme potřebovat pojmy horní a dolní hranice množiny a supremum a infimum množiny. Připomeneme definice těchto pojmů a vztahy mezi nimi.

Definice 1 (horní a dolní hranice množiny). Číslo $H \in \mathbb{R}$ nazveme *horní hranicí množiny* M, pokud platí

$$\forall x \in M : x \leq H$$

Číslo $D \in \mathbb{R}$ nazveme *dolní hranicí množiny* M, pokud platí

$$\forall x \in M : x \geq D$$

Definice 2 (supremum a infimum množiny). Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je množina.

Číslo $S \in \mathbb{R}$ splňující (i), (ii) nazveme *supremem množiny* M a budeme značit $S = \sup(M)$.

(i) $\forall x \in M : x \leq S$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : x > S - \varepsilon$

Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující (iii), (iv) nazveme *infimem množiny* M a budeme značit $s = \inf(M)$.

(iii) $\forall x \in M : x \geq s$

(iv) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in M : x < s + \varepsilon$

Z vlastnosti (i) plyne, že supremum množiny je horní hranicí množiny. Následující lemma ukazuje, že supremum množiny je nejmenší horní hranicí množiny.

Lemma 3 (o supremu a horní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo H je horní hranice množiny M.

Pak platí $H \geq \sup(M)$.

Důkaz provedeme nepřímo. Dokážeme implikaci: je-li $H < \sup(M)$, pak H není horní hranicí množiny M.

Zvolme $\varepsilon = \sup(M) - H$. Pak z $H < \sup(M)$ plyne $\varepsilon > 0$.

Z (ii) pak plyne existence $x \in M$ takového, že platí $x > \sup(M) - \varepsilon$.

Dosazením $\varepsilon = \sup(M) - H$ dostaneme $x > \sup(M) - (\sup(M) - H)$ a po úpravě dostaneme $x > H$. Odtud plyne, že H není horní hranice množiny M. $\square$

Jako cvičení dokažte analogické tvrzení pro infimum a dolní hranici.

Lemma 4 (o infimu a dolní hranici množiny). Nechť je $M \subset \mathbb{R}$ množina a číslo D je horní hranicí množiny M.

Pak platí $D \leq \inf(M)$.

Definice 5 (Riemannův integrál, riemannovská integrovatelnost funkce).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na intervalu I.

Posloupnost čísel x_i, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ splňující $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i < x_{i+1}$ pro $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ nazveme *dělením intervalu* I. Dělení označíme $D = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Číslo

$$HIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

nazveme *horním integrálním součtem funkce* f *pro dělení* D.

Číslo

$$DIS(f, D) := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

nazveme *dolním integrálním součtem funkce* f *pro dělení* D.

Dolním Riemannovým integrálem funkce f *přes interval* I nazveme číslo

$$(R) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{DIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Horním Riemannovým integrálem funkce f *přes interval* I nazveme číslo

$$(R) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{HIS(f, D) : D \text{ je dělení intervalu } I\}$$

Funkci f nazveme *riemannovsky integrovatelnou na intervalu* I, pokud se její dolní a horní Riemannovy integrály rovnají, tedy pokud

$$(R) \int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (R) \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

Společnou hodnotu v (2) pak nazýváme *Riemannovým integrálem funkce* f *na intervalu* I a značíme

$$(R) \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad 6. $I = [0, 1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{5}$ pro $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Spočítáme DIS, HIS.

Příklad 7. $I = [0, 1]$, $f(x) = x$, $x_i = \frac{i}{n}$ pro $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Spočítáme DIS, HIS.

Příklad 8. $I = [0, 1]$, f je Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

D je dělení intervalu I. Spočítáme DIS, HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce není riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Příklad 9. $I = [a, b]$, f je konstantní funkce $f(x) = k$, D je dělení intervalu I. Spočítáme DIS, HIS i dolní a horní Riemannův integrál a ukážeme, že funkce je riemannovsky integrovatelná na intervalu I a platí

$$(R) \int_a^b k \, \mathrm{d}x = k(b - a) \tag{3}$$

Lemma 10. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je riemannovsky integrovatelná funkce na intervalu I.

Nechť $c \in I$, $C \in \mathbb{R}$, g je funkce definovaná vztahem

$$g(x) = \begin{cases} C & x = c \\ f(x) & x \in I \setminus \{c\} \end{cases}$$

Hlavní myšlenka důkazu. Nechť je $\delta > 0$, $\delta < b - a$. Zvolíme dělení D obsahující interval $I_i := [x_i, x_{i+1}] \ni c$ délky $x_{i+1} - x_i = \delta$.

Pak je

$$|HIS(f, D) - HIS(g, D)| \leq \delta |f(c) - g(c)|$$

Odtud plyne

$$(R) \int_a^{\bar{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = (R) \int_a^{\bar{b}} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Podobně pro DIS a dolní Riemannův integrál. □

Poznámka 11. Riemannův integrál jsme definovali na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Z lemma 10 plyne, že změnou funkční hodnoty integrované funkce f v jednom bodě se nezmění hodnota integrálu a nezmění se ani to, zda je funkce f riemannovsky integrovatelná.

Proto nevadí, když funkce v jednom, nebo i ve více, ale konečně mnoha bodech, není definovaná. Z toho důvodu můžeme mluvit o riemannovské integrovatelnosti a Riemannově integrálu funkce na otevřeném omezeném intervalu $I = (a, b)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Níže v lemma 13 dokážeme postačující podmínku riemannovské integrovatelnosti funkce. V závěru důkazu budeme potřebovat lemma 12, které nyní dokážeme.

Lemma 12 (o limitním přechodu). Nechť $K \in \mathbb{R}$, $K \geq 0$ a nechť platí $\forall \varepsilon > 0 : K < \varepsilon$.

Pak je $K = 0$.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že $K > 0$. Zvolme $\varepsilon = K/2$. Pak je $\varepsilon > 0$ a $K > \varepsilon$. To je spor s předpokladem $K < \varepsilon$. $\square$

Lemma 13 (o riemannovské integrovatelnosti).

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce omezená na I.

Nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu I takové, že platí

$$HIS(f, D) - DIS(f, D) < \varepsilon$$

Pak je funkce f riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Důkaz.

Funkce na uzavřeném intervalu:

Stejnoměrná spojitost

Riemannovská integrovatelnost

Definice 14 (stejnoměrná spojitost funkce). Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$, f je funkce definovaná na M. Řekneme, že je funkce f *stejnoměrně spojitá na množině* M, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in M)(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon) \quad (4)$$

Příklad 15. $I = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, funkce f je spojitá na I. Ukážeme, že není stejnoměrně spojitá na I.

Zvolme $\varepsilon = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{n+1}$.

Pak je $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n + 1)| = 1$.

Zároveň je $|x_1 - x_2| < \frac{1}{n}$. Volbou $n \geq \frac{1}{\delta}$ dostaneme $\delta \leq \frac{1}{n}$ a odtud dostaneme $|x_1 - x_2| < \frac{1}{n} \leq \delta$.

Závěr: pro každé $\delta > 0$ jsme našli $x_1, x_2 \in I$ splňující $|x_1 - x_2| < \delta$ a zároveň $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Pro $\varepsilon = 1$ tedy neplatí (4) v definici stejnoměrné spojitosti. Odtud plyne, že f není stejnoměrně spojitá funkce na intervalu I.

Lemma 16 (o spojitosti stejnoměrně spojité funkce). Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval, f je funkce stejnoměrně spojitá na I. Pak je f spojitá na I.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $I = (-\infty, \infty)$. Zvolme $x_0 \in I$ a $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, proto existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in U_\delta(x_0)$ platí $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A proto je funkce f spojitá v bodě x_0.

Nechť je nyní $I = (a, b)$ otevřený interval. Označme $d = \min\{b - x_0, x_0 - a\}$ (vzdálenost bodu x_0 od kraje intervalu). Pak pro $\delta_1 = \min\{d, \delta\}$ a pro $x \in U_{\delta_1}(x_0)$ je $x \in I$ a $x \in U_\delta(x_0)$. Z (4) pak plyne $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$. A proto je funkce f spojitá v bodě x_0.

Nechť je nyní $I = [a, b)$, případně $I = [a, b]$. Chceme ukázat, že je funkce f spojitá v bodě a zprava. Zvolme $\varepsilon > 0$. Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, proto existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in [a, a + \delta)$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Proto je funkce f spojitá v bodě a zprava.

Podobně dokážeme pro intervaly $(a, b]$, $[a, b]$ spojitost funkce f v bodě b zleva.

Dokázali jsme spojitost funkce f v bodech $x_0 \in (a, b)$ a případně spojitost v bodě a zprava a spojitost v bodě b zleva. Proto je funkce f spojitá na intervalu I. $\square$

Věta 17 (o stejnoměrné spojitosti funkce spojité na uzavřeném intervalu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce spojitá na I. Pak je f stejnoměrně spojitá na I.

Věta je v dalším důležitá při důkazu věty o riemannovské integrovatelnosti spojité funkce. Důkaz je mimo rámec přednášené látky, přesto níže pro úplnost uvádíme alespoň jeho hlavní myšlenky.

Hlavní myšlenky důkazu.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že funkce je spojitá na I a není na I stejnoměrně spojitá.

Z negace stejnoměrné spojitosti dostaneme, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in I)(|x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon)$$

Zvolme $\delta = 1/n$. Pak existují $a_n, b_n \in I$ taková, že

$$|a_n - b_n| < 1/n, \qquad |f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$$

Protože je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost, lze z ní vybrat konvergentní posloupnost. Nechť je c limitou této posloupnosti. Protože je I uzavřený interval a $a_n \in I$, plyne odtud $c \in I$.

Označme nyní členy vybrané posloupnosti $A_k = a_{n_k}$ a z posloupnosti (b_n) vyberme odpovídající členy $B_k = b_{n_k}$.

Z $|a_n - b_n| < 1/n$ plyne konvergence poslopuosti (B_k) s limitou c. Ze spojitosti f v bodě c plyne $\lim_{k\to\infty} A_k - B_k = 0$, což je spor s $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$. $\square$

Věta 18 (o riemannovské integrovatelnosti spojité funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce spojitá na I. Pak je f riemannovsky integrovatelná na I.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zkonstruujeme dělení D intervalu I takové, že

$$HIS(f, D) - DIS(f, D) < \varepsilon \tag{5}$$

Z lemma 13 o riemannovské integrovatelnosti pak plyne riemannovská integrovatelnost funkce f na intervalu I.

Zvolme $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu, proto je na něm stejnoměrně spojitá. Protože je $\tilde{\varepsilon} > 0$, existuje $\delta > 0$ splňující

$$\forall y, z \in I : |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \tilde{\varepsilon}$$

Zvolme dělení $x_i = a + i\delta$, dokud je $x_i < b$ a následující $x_n = b$.[1]

Uvažujme $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ a označme interval $I_i := [x_i, x_{i+1}]$ a jeho střed $c_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Pak pro $x \in I_i$ je $|x - c_i| < \delta$ a tedy

$$|f(x) - f(c_i)| < \tilde{\varepsilon} \tag{6}$$

Po odstranění absolutní hodnoty a úpravě zapíšeme (6)

$$\forall x \in I_i : f(x) < f(c_i) + \tilde{\varepsilon}, \quad \forall x \in I_i : f(x) > f(c_i) - \tilde{\varepsilon} \tag{7}$$

Z (7) plyne, že $f(c_i) + \tilde{\varepsilon}$ je horní hranice množiny $M := \{f(x) : x \in I_i\}$ a $f(c_i) - \tilde{\varepsilon}$ je dolní hranice množiny M. Z lemmat 3, 4 plyne

$$\sup(M) \leq f(c_i) + \tilde{\varepsilon}, \tag{8}$$
$$\inf(M) \geq f(c_i) - \tilde{\varepsilon}. \tag{9}$$

Rovnici (8) vynásobíme $x_{i+1} - x_i$, rovnici (9) vynásobíme $-(x_{i+1} - x_i)$ a rovnice sečteme. Po úpravě pravé strany dostaneme

$$\sup(M)(x_{i+1} - x_i) - \inf(M)(x_{i+1} - x_i) \leq 2\tilde{\varepsilon}(x_{i+1} - x_i) \tag{10}$$

Rovnice (10) pro $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ sečteme. Dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\sup(M)(x_{i+1} - x_i) - \inf(M)(x_{i+1} - x_i)) \leq 2\tilde{\varepsilon} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \tag{11}$$

[1] Tedy $n = \min\{i \in \mathbb{N} : a + i\delta \geq b\}$.

Na levé straně (11) je rozdíl horního a dolního integrálního součtu $HIS(f,D)-DIS(f,D)$. K úpravě pravé strany použijeme

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} - x_i = b - a \tag{12}$$

Dosazením $\tilde{\varepsilon} = 2\varepsilon/(b-a)$ a (12) do (11) dostaneme (5).

Odtud plyne, že funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

$\square$

Vlastnosti Riemannova integrálu

Derivace integrálu podle horní meze

Věta 19 (o vlastnostech Riemannova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Nechť jsou funkce f, g definované na I.

Pak platí

(i) Nechť $c \in (a, b)$. Pak je f riemannovsky integrovatelná na I právě když je riemannovsky integrovatelná na obou intervalech $[a, c]$, $[c, b]$ a platí

$$(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru.*

(ii) Nechť jsou f, g riemannovsky integrovatelné na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (R) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

Tuto vlastnost nazýváme *monotonií vzhledem k integrované funkci.*

Hlavní myšlenky důkazu.

Věta 20 důležitá (o derivaci integrálu podle horní meze). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I.

Definujme pro $t \in (a, b]$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nechť $t \in (a, b)$ a funkce f je spojitá v bodě t.

Pak je funkce R diferencovatelná v bodě t a platí $R'(t) = f(t)$.

Hlavní myšlenka důkazu. Nechť $h > 0$, $t + h \in (a, b)$. Z aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru plyne

$$R(t+h) = R(t) + (R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud plyne

$$R(t+h) - R(t) = (R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Protože je funkce f spojitá v bodě t, je pro malé h přibližně

$$(R) \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \doteq h f(t)$$

Odtud dostaneme

$$\frac{R(t+h) - R(t)}{h} \doteq f(t) \tag{15}$$

Podobně pro $h < 0$, $t + h \in (a, b)$ dostaneme

$$R(t) = R(t+h) + (R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud

$$R(t+h) - R(t) = -(R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a ze spojitosti funkce f v bodě t dostaneme pro malé h přibližně

$$(R) \int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \doteq -h f(t)$$

Odtud dostaneme (15). $\square$

V důkazu se hodí zavést integrál pro obecnější meze, viz následující definice.

Definice 21. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Nechť $\alpha, \beta \in I$, $\alpha > \beta$. Definujeme

$$\begin{aligned}(R)\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x &= 0\\ (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x &= -(R)\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Lemma 22. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in I$.

Pak platí

$$(R)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

Důkaz. Pro $\alpha < \beta < \gamma$ je (16) totožné s (13). Zbývá probrat ostatní možnosti pro α, β, γ. Ukážeme dva případy, ostatní necháme čtenáři jako cvičení.

Nechť je $\alpha = \gamma > \beta$. Pak je

$$\begin{aligned}(R)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x &= -(R)\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\\ (R)\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x &= (R)\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x\\ (R)\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x &= 0\end{aligned}$$

Dosazením do (16) dostaneme po úpravě nulu na obou stranách rovnosti, a tedy (16) platí.

Nechť je $\beta > \alpha > \gamma$. Pak z (13) plyne

$$(R)\int_{\gamma}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dosazením z definice 21 dostaneme

$$-(R)\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x = -(R)\int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a odtud po úpravě dostaneme (16). $\square$

Důkaz věty o derivaci integrálu podle horní meze. Pro $t, t+h \in (a,b)$ je

$$R(t+h) - R(t) = \int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Nechť je f spojitá v bodě t. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in (t-\delta, t+\delta)$ je

$$f(t) - \varepsilon < f(x) < f(t) + \varepsilon \tag{17}$$

Zvolme $h \in (0, \delta)$. Pak z (17) a z monotonie integrálu podle integrované funkce plyne

$$(R)\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x \le (R)\int_t^{t+h} f(x)\,\mathrm{d}x \le (R)\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x$$

Integrál z konstantní funkce je roven dle (3)

$$(R)\int_t^{t+h} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x = (f(t)-\varepsilon)h, \quad (R)\int_t^{t+h} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x = (f(t)+\varepsilon)h.$$

Odtud dostaneme

$$(f(t)-\varepsilon)h \le R(t+h) - R(t) \le (f(t)+\varepsilon)h$$

Nerovnosti vydělíme $h > 0$ a odečteme $f(t)$. Dostaneme

$$-\varepsilon \le \frac{R(t+h) - R(t)}{h} - f(t) \le \varepsilon \tag{18}$$

Odtud plyne

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = f(t) \tag{19}$$

Podobně pro $h \in (-\delta, 0)$ dostaneme

$$(R)\int_{t+h}^{t} f(t) - \varepsilon\,\mathrm{d}x \le (R)\int_{t+h}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \le (R)\int_{t+h}^{t} f(t) + \varepsilon\,\mathrm{d}x$$

odtud

$$-h(f(t)-\varepsilon) \le R(t) - R(t+h) \le -h(f(t)+\varepsilon)$$

Odtud vydělením $-h > 0$ a odečtením $f(t)$ dostaneme (18) a dále

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} = f(t) \tag{20}$$

Z (19), (20) pak plyne $R'(t) = f(t)$. $\square$

Věta 23 důležitá. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $I = (a, b)$. Nechť f je funkce spojitá na I.

Nechť $c \in I$. Definujme funkci R_c vztahem

$$R_c(t) := (R) \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x \tag{21}$$

Pak je f_c diferencovatelná na I a platí $R_c' = f$.

Důkaz. Nechť je $t > c$. Pak vztah $R_c'(t) = f(t)$ plyne z věty o derivování integrálu podle horní meze.

Nechť je $t \leq c$. Zvolme $c_0 \in (a, t)$. Pak z aditivity integrálu podle integračního oboru plyne

$$(R) \int_{c_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x + (R) \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x = (R) \int_{c_0}^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Odtud po úpravě a dosazení z (21) dostaneme

$$R_c(t) = (R) \int_{c_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x - (R) \int_{c_0}^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Na pravé straně zderivujeme levý integrál podle horní meze a dostaneme $f(t)$. Pravý integrál je konstantní (nezávisí na proměnné t), jeho derivace je tedy rovna nule.

Dostáváme tedy $R_c'(t) = f(t)$. $\square$

Lemma 24. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$, f je funkce riemannovsky integrovatelná na intervalu I. Označme pro $t \in (a, b)$

$$R(t) := (R) \int_a^t f(x) \, \mathrm{d}x$$

Pak platí

$$\lim_{t \to a^+} R(t) = 0, \qquad \lim_{t \to b^-} R(t) = (R) \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

Důkaz.

Primitivní funkce

Definice 25 (primitivní funkce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť je funkce f definovaná na intervalu I.

Funkci F definovanou na I nazveme *primitivní funkci funkce f na intervalu I*, pokud platí

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x) \tag{22}$$

Příklad 26. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log|x|$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (-\infty, 0)$.

Příklad 27. Ukážeme, že funkce $F(x) = \log(2x)$ je primitivní funkcí funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $I = (0, \infty)$.

Věta 28 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, f je funkce f definovaná na intervalu I. Nechť F_1, F_2 jsou primitivní funkce funkce f na intervalu I.

Pak platí
$$\exists C \in \mathbb{R}\, \forall x \in I : F_2(x) = F_1(x) + C$$

Důkaz.

Věta 29 důležitá (o existenci primitivní funkce ke spojité funkci). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I.

Pak existuje funkce F primitivní k f na I.

Důkaz. Zvolme $x_0 \in I$ a pro $x \in I$ definujme

$$F(x) = (R)\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ve větě 20 textu o Riemannově integrálu jsme ukázali, že pro $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Odtud plyne, že je funkce F primitivní funkce f na intervalu I. $\square$

Newtonův integrál

Definice 30 (Newtonův integrál). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$, nechť jsou funkce f, F definované na intervalu I. Nechť je F primitivní funkce f na I. Nechť existují konečné limity

$$\lim_{x \to a^+} F(x), \qquad \lim_{x \to b^-} F(x)$$

Pak říkáme, že je funkce f *Newtonovsky integrovatelná na intervalu* I a *Newtonovým integrálem funkce* f *na* I nazýváme číslo

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x) \tag{23}$$

Hodnotu na pravé straně (23) nazýváme *Newtonovým integrálem* i v případě, že je některá z limit nevlastní a jejich rozdíl je definován.

Příklad 31. Vypočteme $(N) \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Příklad 32. Ukážeme, že $f(x) = \frac{1}{x}$ není Newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 2)$.

Věta 33 (o vlastnostech Newtonova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $I = (a, b)$. Nechť jsou funkce f, g definované na I.

Pak platí

(i) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na intervalu I a nechť $c \in (a, b)$.

Pak je f newtonovsky integrovatelná na intervalech (a, c), (c, b) a platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N) \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (N) \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{24}$$

Tuto vlastnost nazýváme *aditivitou vzhledem k integračnímu oboru.*

(ii) Nechť je f newtonovsky integrovatelná na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \geq 0.$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0 \tag{25}$$

Tuto vlastnost nazýváme *pozitivitou newtonova integrálu.*

(iii) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Pak je funkce $h = \alpha f + \beta g$ newtonovsky integrovatelné na I a platí (na pravé straně jsme pro větší přehlednost vynechali značku (N))

$$(N) \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Tuto vlastnost nazýváme *linearitou newtonova integrálu.*

(iv) Nechť jsou f, g newtonovsky integrovatelné na I. Nechť platí

$$\forall x \in I : f(x) \leq g(x).$$

Pak platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (N) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{26}$$

Tuto vlastnost nazýváme *monotonií newtonova integrálu.*

Důkaz.

Příklad. 34 Vypočteme integrál $(N)\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Po úpravě dostaneme $(N)\int_0^\pi |\cos(x)|\,\mathrm{d}x$.

Použijeme aditivitu integrálu, poté v integrálech odstraníme absolutní hodnotu a mínus vytkneme před integrál

$$(N)\int_0^\pi |\cos(x)|\,\mathrm{d}x = (N)\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,\mathrm{d}x - (N)\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Výpočtem pak dostaneme

$$(N)\int_0^\pi |\cos(x)|\,\mathrm{d}x = 2.$$

Věta 35 důležitá (Newton – Leibniz). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = [a, b]$. Nechť je funkce f spojitá na intervalu I.

Pak je f riemannovsky integrovatelná na I, newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí

$$(N) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{27}$$

Důkaz. Protože je funkce f spojitá na uzavřeném intervalu I, je na něm podle věty 15 riemannovsky integrovatelná.

Zvolme $c \in (a, b)$. Pak je dle věty 29 funkce F primitivní k f na intervalu (a, b)

$$F(x) = (R) \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Definujme dále pro $x \in (a, b)$

$$R(x) = (R) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Z aditivity Riemannova integrálu vzhledem k integračnímu oboru (věta 16, (i)) plyne

$$(R) \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = (R) \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + (R) \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Odtud dosazením z definice funkcí F, R dostaneme

$$F(x) = (R) \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + R(x)$$

Z limit v lemma 21 plyne (člen s integrálem je konstantní – nezávisí na proměnné x)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a^+} F(x) &= (R) \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t \\
\lim_{x \to b^-} F(x) &= (R) \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + (R) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že je f newtonovsky integrovatelná na (a, b) a platí rovnost (27). $\square$

Aplikace integrálů

Odvodíme vzorce pro obsah obrazce, délku křivky, objem rotačně symetrického tělesa a použijeme je na příkladech.

Integrální kritérium konvergence řad

Odvodíme kritérium a použijeme ho na příkladech.