Integrální kritérium konvergence řad

V této kapitole vyložíme integrální kritérium konvergence řad. Zahájíme zkoumáním konvergence řad (29) – (32). Jejich součet převedeme na integrál a konvergenci zjistíme potom výpočtem integrálu (věta 41).

Pro snadnější formulaci důkazu se nám bude hodit pojem celá část z reálného čísla. Jde v podstatě o zaokrouhlení na nejbližší menší celé číslo, jak je vidět z následující definice.

Definice 36. Nechť $x \in \mathbb{R}$. *Celou částí čísla* x nazveme číslo $\lfloor x \rfloor$ splňující

(i) $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$

(ii) $\lfloor x \rfloor \leq x$

(iii) $\lfloor x \rfloor + 1 > x$

Motivace 37.
Chceme zjistit, zda konvergují řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \tag{32}$$

Řada (29) nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{k \to \infty} k \neq 0$$

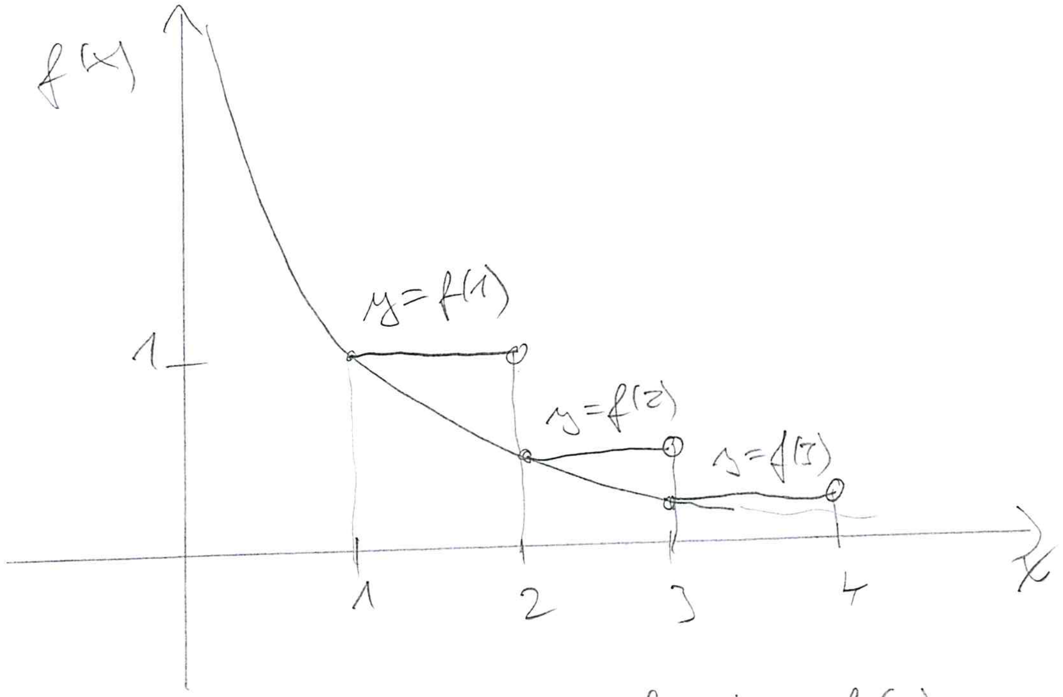
proto nekonverguje.

Ostatní řady nutnou podmínku konvergence splňují

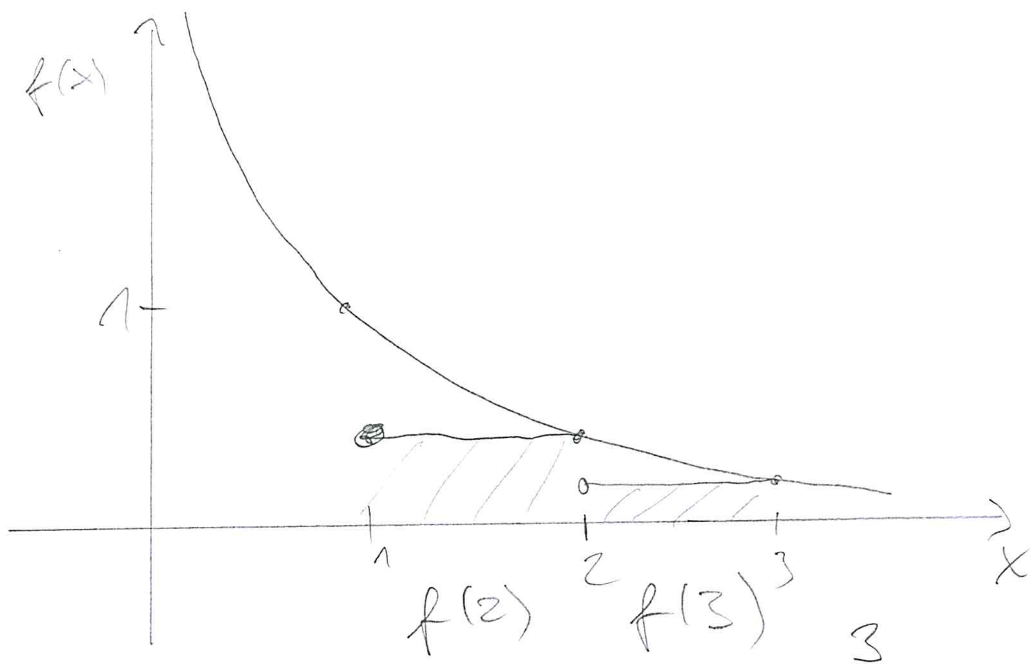
$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

Odtud ale nic neplyne pro konvergenci těchto řad.

Protože mají tyto řady kladné členy, mají všechny součet a jde jen o to určit, zda je tento součet konečný.



$$f(1)+f(2)+f(3)=\int_1^4 f(\lfloor x\rfloor)\,dx$$



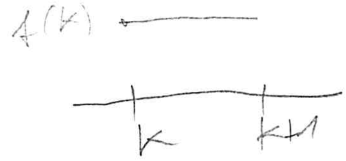
$$f(2)+f(3)=\int_1^3 f(\lfloor x\rfloor+1)\,dx$$

Pomocí funkcí $f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/\sqrt{x}$ vyjádříme členy řad (30) – (32) ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Číslo $f(k)$ napíšeme pomocí integrálu z konstantní funkce $x \mapsto f(k)$ přes interval délky jedna (kreslete obrázek)

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x$$



Číslo k nahradíme na pravé straně pro $x \in [k, k+1)$ celou částí čísla $\lfloor x \rfloor$. Dostaneme

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x$$

Pomocí integrálu pak vyjádříme částečný součet řady

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n+1} f(\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

Při úpravě jsme využili aditivitu integrálu vzhledem k integračnímu oboru.

Integrál v (33) neumíme vyčíslit, proto ho odhadneme. Využijeme toho, že jsou funkce f klesající na intervalu $(0, \infty)$. Protože platí $\lfloor x \rfloor \le x$, plyne odtud $f(\lfloor x \rfloor) \ge f(x)$. Z monotonie integrálu pak plyne

$$\int_1^{n+1} f(\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x \ge \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Levou stranu nahradíme z (33) částečným součtem

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ge \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a limitním přechodem v nerovnosti pak dostaneme odhad pro součet nekonečné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \ge \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Spočítáme hodnotu výrazu na pravé straně nerovnosti a pokud vyjde nekonečná, plyne odtud, že i levá strana je rovna nekonečnu a tedy řada na levé straně nekonverguje.

Pokud je hodnota pravé strany konečná, neplyne odtud nic. Podobnými úvahami (podrobnosti ve cvičení 38) odvodíme

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

a odtud plyne z konečnosti pravé strany konečnost levé strany a tedy konvergence řady.

Cvičení 38.

1. Ukažte, že pro funkci f klesající na intervalu $(0,\infty)$ a pro $x > 1$ platí $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$ a $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x-1)$
2. Ukažte, že pro funkci f klesající na intervalu $(0,\infty)$ platí
$$\int_2^{n+1} f(\lfloor x \rfloor)\,\mathrm{d}x \leq \int_2^{n+1} f(x-1)\,\mathrm{d}x$$
3. Ukažte, že platí
$$\int_2^{n+1} f(x-1)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$
4. Z předchozích cvičení odvoďte (34).

Poznámka 39. Limitu v (34) a dalších vztazích nahradíme integrálem přes neomezený interval

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{35}$$

Tento vztah plyne v případě Newtonova integrálu přímo z definice Newtonova integrálu.

V případě Riemannova integrálu je definován jen integrál na levé straně. Integrál na pravé straně nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem* a vztah (35) je definicí tohoto nevlastního Riemannova integrálu.

Příklady 40.

1. Výpočtem integrálů
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \log(x)\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \log(x) - \log(1) = +\infty$$

zjistíme součty řad
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$

2. Výpočtem integrálu
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x} - 2\sqrt{1} = \infty$$

dostaneme pomocí (34) konvergenci řady
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$$

Navíc ze vztahu (34) dostaneme
$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2} \leq 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = -x^{-1}\Big|_1^\infty = \lim_{x\to\infty}(-x^{-1}) - (-1^{-1}) = 1$$

a odtud
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2} \leq 2$$

Řadu $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ je možné sečíst prostředky, které jsou mimo možnosti tohoto textu. Součet je roven $\pi^2/6$, což souhlasí s naším výpočtem.

Věta 41 (integrální kritérium konvergence řad). Nechť je funkce f nerostoucí na intervalu $[1,\infty)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

(i) Řada $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ je konvergentní.

(ii) Integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ má konečnou hodnotu.

Hlavní myšlenky důkazu. Nejdříve je třeba ukázat, že integrál v (ii) existuje. Spokojme se s konstatováním, že existence nevlastního Riemannova integrálu plyne z Riemannovské integrovatelnosti monotonní funkce a z existence jednostranné limity monotonní funkce.

Newtonův integrál neexistuje v námi definované verzi, pokud není funkce f na intervalu $[1, \infty)$ spojitá. Existuje v zobecněné verzi, kde místo primitivní funkce použijeme tzv. zobecněnou primitivní funkci, u které se v konečném počtu bodů místo diferencovatelnosti spokojíme se spojitostí.

Důkaz těchto tvrzení přesahuje rámec tohoto textu.

Další kroky důkazu jsou analogiemi úvah výše v motivačních příkladech 37 a cvičení 38.

Příklad 42. Určíme, pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a$$

Pro $a > 0$ je $\lim_{k\to\infty} k^a = \infty$, není tedy splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy nekonverguje.

Pro $a = 0$ je $\lim_{k\to\infty} k^a = 1$, opět tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada tedy nekonverguje.

Pro $a < 0$ je $\lim_{k\to\infty} k^a = 0$ a je tedy splněna nutná podmínka konvergence. K určení konvergence řady použijeme větu ~~39~~. 4.1

Výpočtem primitivní funkce pro $a \neq -1$ dostaneme

$$\int_1^{\infty} x^a \, \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{a+1}}{a+1} - \lim_{x\to \cancel{a^+}\, 1^+} \frac{x^{a+1}}{a+1}$$

Pro $a \in (-1, 0)$ je $a + 1 > 0$, proto je limita v nekonečnu rovna nekonečnu a tedy řada pro tato a nekonverguje.

Případ $a = \cancel{1}\,-1$ jsme vyřešili výše v motivaci 37.

Pro $a < -1$ je $a + 1 < 0$, proto je limita v nekonečnu rovna nule a tedy řada pro tato a konverguje.

Závěrem konstatujme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^a$ konverguje právě když je $a < -1$.

Častěji se s touto řadou setkáme v jiném tvaru, ten probereme v následujícím cvičení.

Cvičení 43. Určete pro která $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$$

$(a > 1)$