Úlohy k přípravě na zkoušku z AN2

Prozatímní verze

1a Nalezněte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

1b

$$f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$$

1c

$$f(x) = 3\sin^2(x) + 4\cos^3(x)$$

1d

$$f(x) = \sin(x)\cos^3(x)$$

1e

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1f

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}(1/x)$$

1g

$$f(x) = \arcsin(3x - 2)$$

1h

$$f(x) = \arcsin\sqrt{x - x^2}$$

1i

$$f(x) = \arcsin(2x^2 + 2x)$$

1j

$$f(x) = \frac{\log(x)}{\sqrt{x^5}}$$

1k

$$f(x) = \sqrt{x^3}\,\log(x)$$

1l

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x)}$$

1m

$$f(x) = \log(x^3 - 12x)$$

1n

$$f(x) = (x^2 - 2)\exp(2x)$$

1o

$$f(x) = \exp\frac{x+1}{x^2-1}$$

1p

$$f(x) = (x^2 + x + 1)\exp(x)$$

1q

$$f(x) = (2x - 1)\exp(-x^2)$$

1r

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

1s

$$f(x) = \frac{\exp(2x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

1t

$$f(x) = \frac{\exp(3x)}{\exp(x) + \exp(2x) + \exp(3x)}$$

2a – t Určete definiční obor a obor hodnot funkce f. Funkce stejné jako v předchozí úloze.

3a Pro funkce f, g určete definiční obor a body, v nichž má funkce odstranitelnou nespojitost

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad g(x) = \frac{\log(x^2)}{x+1}$$

3b

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(1/x) \qquad g(x) = \frac{x+2}{\log(x^2)}$$

3c

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \qquad g(x) = x\log(x^2)$$

3d

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3+x}{x^2}\right) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)$$

3e

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

3f

$$f(x) = \operatorname{arctg}(1/x^2) \qquad g(x) = x\exp(1/x)$$

3g

$$f(x) = x^2\sin(1/x) \qquad g(x) = \exp\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$$

3h

$$f(x) = (\operatorname{arctg}(1/x))^2 \qquad g(x) = \frac{\exp(1/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

3i

$$f(x) = (\operatorname{arccotg}(1/x))^2 \qquad g(x) = \frac{\exp(2/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

3j

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(1/x^2) \qquad g(x) = \frac{\exp(3/x)}{\exp(1/x)+\exp(2/x)+\exp(3/x)}$$

4a Vypočtěte Taylorův polynom stupně čtyři v bodě nula funkce tangens.

4b Funkce arkustangens, v bodě nula, stupně čtyři.

4c Funkce $f(x) = \log\sqrt{x}$ v bodě jedna stupně čtyři.

4d Funkce $f(x) = \exp(x^2)$ v bodě nula stupně čtyři.

4e Funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(3x)$ v bodě nula stupně čtyři.

4f Funkce $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$ v bodě nula stupně čtyři.

5a (a) Určete, zda následující řady splňují nutnou podmínku konvergence. Co odtud plyne pro konvergenci řady?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^3-2k+3}-6k}{k^2-3k+7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-3k+7}{\sqrt{k^3-2k+3}-6k}$$

(b) Vypočtěte součet řady $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^{2k+1}}$

5b (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4 - 3k^2 + 5} - 4k^2}{k^2 + k - 7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k - 7}{k(\sqrt{k^4 - 3k^2 + 5} - 4k^2)}$$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+4}}$

5c (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^6 - 3k^2 + 5} - 4k^2}{k^2 + k - 7} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k - 7}{k^2(\sqrt{k^6 - 3k^2 + 5} - 4k^2)}$$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^{k-1}}{2^{3k+1}}$

6a Rozhodněte, zda následující řady absolutně konvergují.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{3^{2k+1}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{5k+7}}{k\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

6b

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k3^k}{2^{2k}}$$

6c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^2} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)2^k}{3^{3k-1}}$$

6d

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{k^2 2^{2k+3}} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^2}$$

7a Graf funkce f je sjednocením úseček AB, BC. Načrtněte tento graf a pro $t \in (-1, 4]$ vypočtěte obsah $S(t)$ mnohoúhelníka $M(t)$[1]. K výpočtu použijte prostředky elementární geometrie.

Načrtněte graf funkce S a výsledek zkontrolujte výpočtem derivace S' a náčrtkem grafu této derivace.

$$A = [-1, 4], B = [1, 4], C = [4, 1]$$
$$M(t) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, t], y \in [0, f(x)]\}$$

[1]Mnohoúhelník leží mezi osou x a grafem f v intervalu $[-1, t]$

7b Obsah $S(t)$ vypočtěte pro $t \in (1,4]$.

$$A=[1,5], B=[2,5], D=[4,3]$$

$$M(t)=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : x\in[1,t], y\in[0,f(x)]\}$$

7c Body zvolte tak, že $a<b<c$. Čísla α,β,γ zvolte libovolná kladná, ale ne všechna stejná. Obsah $S(t)$ vypočtěte pro $t\in(a,c]$.

$$A=[a,\alpha], B=[b,\beta], C=[c,\gamma]$$

8a Nalezněte primitivní funkce k funkcím f, g a udělejte zkoušku. Pro každou z primitivních funkcí zvolte otevřený a maximální možný interval (tj. takový, který nemůžete zvětšit).

$$f(x)=x^2\sin(x),\qquad g(x)=6x\sqrt{x^2+2}$$

8b

$$f(x)=\operatorname{tg}(x),\qquad g(x)=\operatorname{arctg}(x)$$

8c

$$f(x)=x^2\log(x),\qquad g(x)=\frac{\exp(x)}{1+\exp(2x)}$$

8d

$$f(x)=x^3\cos(x),\qquad g(x)=\frac{x^3+2x}{x^3-4x}$$

8e

$$f(x)=(1-x^2)\exp(x),\qquad g(x)=\frac{2}{2+\sqrt{x}}$$

8f

$$f(x)=\sin^2(x),\qquad g(x)=x\exp(-x^2)$$

8g

$$f(x)=(2x+1)^3,\qquad g(x)=\arcsin(x)$$

8h

$$f(x)=\log(x),\qquad g(x)=\frac{x^3+2x}{x^3+4x}$$

8i

$$f(x)=\left(\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}\right):\left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right),\qquad g(x)=(1-x)^4$$

8j

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+x}, \qquad g(x) = \frac{\log(x)}{x}$$

8k

$$f(x) = \frac{\exp(3x) - \exp(-2x)}{\exp(x)}, \qquad g(x) = \frac{3x}{x^2+2x+5}$$

8l

$$f(x) = \cos^2(x), \qquad g(x) = \frac{x^2-2}{x^3+2x^2}$$

8m* [2]

$$f(x) = x\sin^2(x), \qquad g(x) = (\log(x))^2$$

8n*

$$f(x) = x\sin^3(x), \qquad g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$$

8o*

$$f(x) = (\log(x))^3, \qquad g(x) = (\arcsin(x))^2$$

9a Vypočtěte Newtonův a Riemannův integrál.[3]

Z hrubého náčrtku grafu funkce určete znaménko integrálu a porovnejte s výsledkem.

Doporučujeme udělat zkoušku výpočtu primitivní funkce.

$$\int_0^\pi \sin^3(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

9b

$$\int_0^\pi x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

9c

$$\int_0^1 x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

9d

$$\int_{-\infty}^0 x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

[2] Úlohy označené hvězdičkou se i v písemce vyskytnou nejvýše jako hvězdičkové.

[3] Poznámka, která v zadání písemky nebude: může nastat případ, že jeden z integrálů neexistuje.

9e

$$\int_{-1}^{2} x \exp(-x^2)\, \mathrm{d}x$$

9f

$$\int_{0}^{\infty} x^2 \exp(-x)\, \mathrm{d}x$$

9g

$$\int_{0}^{1} x^2 \log(x)\, \mathrm{d}x$$

9h

$$\int_{0}^{1} x^3 \exp(x)\, \mathrm{d}x$$

9i

$$\int_{0}^{pi/2} \cos^5(x)\, \mathrm{d}x$$

9j

$$\int_{0}^{2} x\sqrt{4-x^2}\, \mathrm{d}x,$$

9k

$$\int_{0}^{1} \log(x)\, \mathrm{d}x$$

9l Vypočtěte Newtonův a Riemannův integrál.[4]

Z náčrtku grafu funkce určete přibližnou hodnotu integrálu a porovnejte s výsledkem.[5]

Doporučujeme udělat zkoušku výpočtu primitivní funkce.

$$\int_{0}^{1} \operatorname{arctg}(x)\, \mathrm{d}x$$

9m

$$\int_{0}^{1} \arcsin(x)\, \mathrm{d}x$$

[4] Poznámka, která v zadání písemky nebude: může nastat případ, že jeden z integrálů neexistuje.

[5] V některých úlohách budete potřebovat přibližnou hodnotu $\log(2) \doteq 0.7$. Doporučuji napsat si ji do taháku.

9n

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}(x)\,\mathrm{d}x$$

10a Vypočtěte určitý integrál.

$$\int_{-1}^{1} \left| x\sqrt{x^2+8} \right| \,\mathrm{d}x$$

10b

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

10c

$$\int_0^2 \sqrt{(2x-1)^6}\,\mathrm{d}x$$

10d

$$\int_0^2 \sqrt{(2-3x)^6}\,\mathrm{d}x$$

10e

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2(x^2+8)}\,\mathrm{d}x$$

11a Načrtněte obrazec M, který leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Odhadněte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.[6]

Poté objem tělesa vypočtěte.

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

11b

$$f(x) = 2 - \sqrt{x}$$

11c

$$f(x) = 4 - x^2$$

11d Obrazec M leží v prvním kvadrantu a shora je omezen grafem funkce f. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací obrazce M kolem osy x.

$$f(x) = (2-x)\exp(x)$$

[6]Poznámka, která v písemce nebude: graf nahraďte úsečkou, těleso kuželem. Vypočtěte objem kužele a z grafu určete, které z těles má větší objem.

11e

$$f(x) = (3 - 2x)\exp(x/2)$$

11f* [7]

$$f(x) = (x^2 - x)\log(x)$$

11g*

$$f(x) = \arccos(x)$$

[7] Úlohy označené hvězdičkou se i v písemce vyskytnou nejvýše jako hvězdičkové.