Úlohy na cvičení 29. dubna 2025 z AN2

Připomínám nevyřešené úlohy z minulého týdne.

Další úlohy na tento týden jsou:

1. Nechť $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pro $x \in M$ definujeme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \\ F_1(x) &= \log|x| \\ F_2(x) &= \operatorname{sgn}(x) + \log|x| \end{aligned}$$

   Ukažte, že platí (i) a neplatí (ii)

   (i) $\forall x \in M : F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$

   (ii) $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in M : F_2(x) = F_1(x) + C$

2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$. Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$.

   Z přednášky víte, že pro $\alpha < \beta < \gamma$ platí

$$(R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_\beta^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_\alpha^\gamma f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

   Ukažte, že (1) platí i pro ostatní hodnoty $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$.

3a V zadání je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $p^2 < 4q$.

   Ukažte, že funkce F je primitivní funkcí funkce f na intervalu I, který zvolte.

$$f(x) = \frac{1}{x+b}, \quad F(x) = \log(x+b)$$

3b

$$f(x) = \frac{1}{(x+b)^n}, \quad F(x) = \frac{1}{(1-n)(x+b)^{n-1}}$$

3c

$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

3d

$$f(x) = \frac{1}{(x+b)^2+a^2}, \quad F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{a}\right)$$

3e

$$f(x) = \frac{2x+p}{x^2+px+q}, \quad F(x) = \log(x^2+px+q)$$

4a Nalezněte primitivní funkci k funkci h a určete otevřený interval, na kterém jste primitivní funkci našli.

$$h(x) = \frac{8x}{3+x}$$

4b

$$h(x) = \frac{2x^2+2x}{x^2+1}$$

4b

$$h(x) = \frac{x^3 - x^{-2}}{x^2}$$

5. Úvod k dalším úlohám (je možné je vyřešit i bez čtení úvodu).

V následující úloze máme zadaný otevřený interval I_1 a funkci g, která je rostoucí na intervalu I_1 a zobrazuje I_1 na I_2.

Dále máme zadanou funkci f a naším úkolem je najít funkci F primitivní k f na intervalu I_2.

Místo F budeme hledat primitivní funkci k funkci h, kterou definujeme vztahem

$$h(x) = (F(g(x)))'$$

Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce a vztah $F' = f$ a dostaneme

$$h(x) = f(g(x))g'(x) \tag{2}$$

5a Načrtněte graf g na I_1 a určete $I_2 := \{g(x) : x \in I_1\}$.

Vypočtěte $h(x)$ ze vztahu (2) a k funkci h vypočtěte její primitivní funkci H na intervalu I_1.

Vypočtěte inverzní funkci $g^{-1}(y)$ na I_2 a funkci $F(y) = H(g^{-1}(y))$. Ukažte, že F je primitivní funkce k funkci f na I_2.

$$g(x) = x^2, \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{4}{3+\sqrt{y}}$$

5b

$$g(x) = x^2, \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{1+\sqrt{y}}{1+y}$$

5c

$$g(x) = \log(x), \quad I_1 = (0, \infty), \quad f(y) = \frac{\exp(3y) - \exp(-2y)}{\exp(y)}$$

5d

$$g(x) = \exp(x), \quad I_1 = \mathbb{R}, \quad f(y) = \frac{\log(y)}{y}$$