Definice a vlastnosti exponenciální funkce

Věta o exponenciální funkci.
Existuje právě jedna funkce exp splňující E1, E2, E3, kde

E1 Definiční obor funkce exp je $D(\exp) = \mathbb{R}$

E2
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y))$$

E3
$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

Hlavní myšlenky důkazu.
Jednoznačnost: Z axiomů E1, E2, E3 odvodíme Taylorův polynom funkce exp v bodě nula
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
a ukážeme, že pro $x \in \mathbb{R}$ je $\exp(x)$ limitou $T_n(x)$:
$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$

Existence: Ukážeme, že funkce
$$\exp(x) := \lim_{n \to \infty} T_n(x)$$
splňuje E1, E2, E3.

Definice exponenciální funkce. Funkci exp splňující E1, E2, E3 nazýváme exponenciální funkcí, nebo též exponenciálou.

Poznámka. Při zápisu e^x místo $\exp(x)$ je axiom E2
$$e^{x+y} = e^x e^y$$

Vlastnosti, které plynou z axiomů E1, E2, E3.

A.
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 0)$$

Dosadte do E2 $x/2$ za x i y.

B.
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) > 0)$$

Dokažte sporem. Předpokládejte existenci $a \in \mathbb{R}$ splňujícího $\exp(a) = 0$. Do E2 dosaďte $x = a$, $y = b - a$ a odvoďte $\forall b \in \mathbb{R} : \exp(b) = 0$. To je spor E3.

C.
$$\exp(0) = 1$$

Do E2 dosaďte $x = y = 0$ a použijte B.

D.
$$\exp'(0) = 1$$

Použijte C, E3.

E.
$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Odvoďte z definice, použijte E3.

F. exp je spojitá na $\mathbb{R}$ (plyne z E)

G. exp je rostoucí na $\mathbb{R}$ (plyne z B, E)

H.
$$(\forall x < 0)(\exp(x) \in (0, 1))$$

Plyne z B, C, G.

I.
$$(\forall x > 0)(\exp(x) > 1)$$

Plyne z C, G.

J.
$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq x + 1)$$

Pro funkci $f(x) = \exp(x) - (x + 1)$ a její derivaci $f'(x) = \exp(x) - 1$ plyne z H, I monotonie a minimum v bodě nula. Odtud a z C pak plyne J.

K.
$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Plyne z J a z obdoby policejní věty pro nekonečnou limitu (horní policajt je nahrazem nekonečnem).

L.

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \left(\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \right)$$

Plyne z C, E2, dosaďte $x = a$, $y = -a$.

M.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(-x) = 0$$

Plyne z K, L.

N.

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$$

Plyne z věty o limitě složené funkce a z M.

O. Obor hodnot exponenciální funkce je $H(\exp) = (0, +\infty)$.
Plyne z F, G, K, N.

P. Taylorův polynom funkce exp v bodě nula stupně n je

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

Plyne z C, E.

Q. Pomocí Lagrangeova tvaru zbytku Taylorova polynomu se pak dá dokázat

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Věta o Lagrangeově tvaru zbytku zní: Je-li $f \in C([a, x] \cup [x, a])$[1] a má na intervalu $(a, x) \cup (x, a)$ derivaci řádu n, pak existuje $c \in (a, x) \cup (x, a)$ takové že

$$f(x) = T_{n-1,a}(x) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - a)^n$$

Zde $T_{n-1,a}$ značí Taylorův polynom stupně $n - 1$ v bodě a.

[1]Symbol $C(M)$ značí množinu funkcí spojitých na množině M.