Dvojný a dvojnásobný integrál

text pro studenty FP TUL

28. ledna 2025

Martina Šimůnková

Definice dvojného integrálu. Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, Nechť $f : O \to \mathbb{R}$ je funkce.

Nechť $I = \{x_i : i \in \{0, 1, \ldots, m\}\}$, $x_0 = a$, $x_m = b$, $x_i < x_k$ pro $i < k$ je dělení intervalu $[a, b]$.

Nechť $J = \{y_j : j \in \{0, 1, \ldots, n\}\}$, $y_0 = c$, $y_n = d$, $y_j < y_k$ pro $j < k$ je dělení intervalu $[c, d]$.

Nechť

$$\begin{aligned} M_{ij} &= [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1}), & (1)\\ f_{ij} &= \{f(x, y) : (x, y) \in M_{ij}\}, & (2)\\ H_{ij} &= \sup(f_{ij}) & (3)\\ D_{ij} &= \inf(f_{ij}) & (4) \end{aligned}$$

Horním integrálním součtem funkce f pro dělení I, J nazveme číslo

$$H_{I,J,f} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) H_{ij}$$

Dolním integrálním součtem funkce f pro dělení I, J nazveme číslo

$$D_{I,J,f} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) D_{ij}$$

Horním integrálem funkce f na obdélníku O nazveme číslo

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf\{H_{I,J,f} : \text{dělení } I \text{ intervalu } [a, b], \text{dělení } J \text{ intervalu } [c, d]\}$$

Dolním integrálem funkce f na obdélníku O nazveme číslo

$$\underline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup\{D_{I,J,f} : \text{dělení } I \text{ intervalu } [a, b], \text{dělení } J \text{ intervalu } [c, d]\}$$

Funkci f nazveme integrovatelnou na obdélníku O, pokud platí

$$\overline{\iint_O} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_O} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

a tuto společnou hodnotu nazýváme dvojným integrálem funkce f na obdélníku O.

Vlastnosti dvojného integrálu.

1. Nechť O je obdélník, který rozdělíme na dva obdélníky $O = O_1 \cup O_2$ tak, že $O_1^\circ \cap O_2^\circ = \emptyset$. Nechť f je integrovatelná na O.

   Pak je f integrovatelná na O_1, O_2 a platí

   $$\iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{O_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{O_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. Pozitivita integrálu.

   Nechť O je obdélník, f je funkce integrovatelná na O a nechť pro $(x,y) \in O$ platí $f(x,y) \geq 0$.

   Pak platí

   $$\iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$$

3. Monotonie integrálu.

   Nechť O je obdélník, f, g jsou funkce integrovatelné na O a nechť pro $(x,y) \in O$ platí $f(x,y) \geq g(x,y)$.

   Pak platí

   $$\iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_O g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

4. Nechť funkce f je integrovatelná na obdélníku O, nechť $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Pak funkce αf je integrovatelná na O a platí

   $$\iint_O \alpha f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \alpha \iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

5. Nechť funkce f, g jsou integrovatelné na obdélníku O.

   Pak funkce $f+g$ je integrovatelná na O a platí

   $$\iint_O f(x,y) + g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_O f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_O g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lemma (postačující podmínka existence dvojného integrálu). Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, Nechť $f : O \to \mathbb{R}$ je funkce.

Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existují dělení I, J takové že

$$H_{I,J,f} - D_{I,J,f} < \varepsilon$$

Pak je f integrovatelná na O.

Důkaz. Z definice infima a suprema plyne

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq H_{I,J,f}$$
$$\underline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq D_{I,J,f}$$

Odtud dále plyne

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq H_{I,J,f} - D_{I,J,f}$$

Z předpokladu lemma plyne pro každé $\varepsilon > 0$

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$$

odkud plyne

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \underline{\iint_O} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

a odtud tvrzení lemma.

Věta o existenci dvojného integrálu ze spojité funkce. Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, Nechť funkce $f : O \to \mathbb{R}$ je spojitá na O.

Pak je f integrovatelná na O.

Důkaz. Obdélník O je kompaktní množina. Funkce spojitá na kompaktní množině je na ní stejnoměrně spojitá. Tedy ke každému $\tilde{\varepsilon} > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou dvojici $a, b \in O$, $\varrho_{eukl}(a, b) < \delta$ platí $|f(a) - f(b)| < \tilde{\varepsilon}$.

Pro dělení I, J obdélníku O splňující

$$x_{i+1} - x_i < \delta/\sqrt{2} \quad \text{pro } i \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$$
$$y_{j+1} - y_j < \delta/\sqrt{2} \quad \text{pro } j \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$$

platí $H_{ij} - D_{ij} < \tilde{\varepsilon}$.

Odtud plyne

$$H_{I,J,f} - D_{I,J,f} < \tilde{\varepsilon}(b-a)(d-c)$$

Volbou $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$ dostaneme

$$H_{I,J,f} - D_{I,J,f} < \varepsilon$$

a z lemma o postačující podmínce existence dvojného integrálu plyne integrovatelnost funkce f na obdélníku O.

Lemma o existenci dvojného integrálu. Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník, nechť $I = \{x_i : i \in \{0,1,\ldots,m\}\}$ je dělení intervalu $[a,b]$, $J = \{y_j : j \in \{0,1,\ldots,n\}\}$ je dělení intervalu $[c,d]$ a nechť je funkce f konstantní na obdélnících $[x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$.

Pak je f integrovatelná na O.

Důkaz necháme čtenáři za cvičení.

Definice dvojnásobného integrálu. Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a,b] \times [c,d]$ je obdélník, Nechť $f : O \to \mathbb{R}$ je funkce.

Dvojnásobným integrálem funkce f na obdélníku O nazýváme integrál

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

a integrál

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Vlastnosti dvojnásobného integrálu.

1. Pozitivita integrálu.

   Nechť O je obdélník, f je funkce integrovatelná na O a nechť pro $(x,y) \in O$ platí $f(x,y) \geq 0$.

   Pak platí

   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \geq 0$$

2. Monotonie integrálu.

   Nechť O je obdélník, f, g jsou funkce integrovatelné na O a nechť pro $(x,y) \in O$ platí $f(x,y) \geq g(x,y)$.

   Pak platí

   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \geq \int_a^b \left(\int_c^d g(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Fubiniova věta. Nechť $a < b$, $c < d$ jsou reálná čísla, $O = [a, b] \times [c, d]$ je obdélník, Nechť funkce $f : O \to \mathbb{R}$ je spojitá na O.

Pak existují dvojný i dvojnásobné integrály funkce f na O a rovnají se.

Důkaz Fubiniovy věty. Pro $y \in [c, d]$ definujme funkci

$$g(y) := \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

Ukážeme, že

1. funkce g je spojitá na intervalu $[c, d]$,
2. $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ je dolní hranice horních integrálních součtů funkce f na obdélníku O,
3. $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$ je horní hranice dolních integrálních součtů funkce f na obdélníku O.

Z 1 plyne existence integrálu $\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y$.
Z 2 plyne

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \le \overline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Z 3 plyne

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y \ge \underline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Z věty o integrovatelnosti spojité funkce plyne

$$\overline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underline{\iint_O} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Odtud pak plyne

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \iint_O f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Důkaz 1:
Zvolme $y_0 \in [c, d]$ a K $\varepsilon > 0$ z volme $\delta > 0$ takové, že pro $y \in U_\delta(y_0) \cap [c, d]$ a pro $x \in [a, b]$ platí $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$. Odtud plyne $|g(y) - g(y_0)| < (b - a)\varepsilon$, a tedy spojitost funkce g na intervalu $[c, d]$.

Důkaz 2:
Nechť I je dělení intervalu $[a, b]$, nechť J je dělení intervalu $[c, d]$.

Použijeme označení z (1) – (4) k definici funkce $h : O \to \mathbb{R}$.

Funkce h je konstantní na množinách M_{ij} s funkční hodnotou H_{ij}.

Platí $f \leq h$ na O a odtud pro $y \in [c, d]$

$$\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b h(x,y)\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y \leq \int_c^d \left(\int_a^b h(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y$$

Dále platí

$$\int_c^d \left(\int_a^b h(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y = H_{I,J,f}$$

odkud plyne 2.

Analogicky dokážeme 3.

Příklady.

1. $\iint_{[0,1]\times[0,2]} x^2 + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
2. Dirichletova funkce není integrovatelná.
3. $\iint_{[\varepsilon,1]\times[\varepsilon,1]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
4. $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x)\mathrm{d}y$, $\int_0^1 (\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$