

Objem tělesa – motivace pro dvojný integrál

1 Motivační úvod: proč a jak vzniká dvojný integrál

Uvažujme praktický geometrický problém: chceme odhadnout objem tělesa, které stojí na podstavě v souřadné rovině xy a shora je ohraničeno grafem funkce dvou proměnných. Konkrétně:

- podstava je množina (obrazec) $D \subset \mathbb{R}^2$ v rovině xy ,
- výška tělesa nad bodem $(x, y) \in D$ je dána funkcí $f(x, y)$,
- budeme uvažovat $f(x, y) \geq 0$, aby výška byla nezáporná veličina.

Těleso pak lze popsat jako množinu bodů v prostoru

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Naším cílem je určit (nebo alespoň dobře odhadnout) jeho objem $\text{obj}(T)$.

1) Nejprve jen odhad: objem mezi dvěma „hranolovými“ tělesy

Předpokládejme, že existují konstanty m a M takové, že

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \text{pro všechna } (x, y) \in D.$$

Pak celé těleso T leží mezi dvěma jednoduchými hranoly:

$$T_m = \{(x, y, z); (x, y) \in D, 0 \leq z \leq m\}, \quad T_M = \{(x, y, z); (x, y) \in D, 0 \leq z \leq M\}.$$

Platí $T_m \subseteq T \subseteq T_M$. Využijeme základní monotonicitu objemu:

$$A \subseteq B \Rightarrow \text{obj}(A) \leq \text{obj}(B).$$

Dostáváme nerovnost

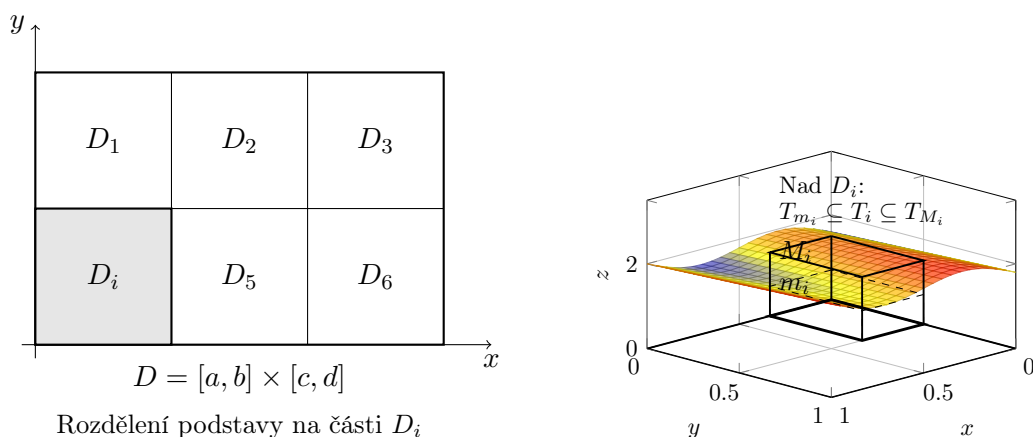
$$\text{obj}(T_m) \leq \text{obj}(T) \leq \text{obj}(T_M).$$

Objem hranolu umíme spočítat jako *obsah podstavy krát výška*:

$$\text{obj}(T_m) = S(D) m, \quad \text{obj}(T_M) = S(D) M,$$

kde $S(D)$ značí obsah množiny D . Tím získáme hrubý, ale srozumitelný odhad:

$$S(D) m \leq \text{obj}(T) \leq S(D) M.$$



Obrázek 1: Schéma situace: vlevo rozdělení podstavy D na části D_i (jedna vyznačena). Vpravo graf nezáporné funkce $z = f(x, y)$ a nad vyznačenou částí D_i dva hranoly s výškami m_i a M_i , které ilustrují monotonicitu objemu i konstrukci dolních a horních odhadů vedoucích k nerovnosti (1).

2) Zpřesnění: rozdělíme podstavu na části a sčítáme objemy

Uvedený odhad je často příliš nepřesný, protože používá jen jednu nejmenší a jednu největší hodnotu funkce na celé oblasti. Přírozenou strategií zpřesnění je rozdělit podstavu D na menší části $D_1, \dots, D_n$ a na každé části odhadovat zvlášť.

K tomu potřebujeme aditivitu objemu:

Pokud A a B nemají společné vnitřní body, pak $\text{obj}(A \cup B) = \text{obj}(A) + \text{obj}(B)$.

Předpokládejme, že části D_i pokrývají D a že nemají společné vnitřní body. Nad každou částí definujeme

$$m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x, y), \quad M_i = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x, y).$$

Označme T_i část tělesa nad D_i . Analogicky jako výše dostaneme

$$S(D_i) m_i \leq \text{obj}(T_i) \leq S(D_i) M_i.$$

Sečtením přes všechna i získáme globální odhad

$$\sum_{i=1}^n S(D_i) m_i \leq \text{obj}(T) \leq \sum_{i=1}^n S(D_i) M_i. \quad (1)$$

Zde se objevuje klíčová myšlenka: objem aproximujeme součtem objemů „tenkých hranolů“ nad malými částmi podstavy, kde výšku bereme jako vhodnou reprezentativní hodnotu funkce (dolní či horní odhad).

3) Slabé místo: výpočet obsahu podstavy

V obou předchozích krocích jsme využívali fakt, že umíme spočítat obsahy $S(D)$ a $S(D_i)$. Pro obecné „křivolaké“ oblasti D však může být tento krok netriviální, a při jemném dělení ještě méně praktický. Proto je metodicky výhodné začít na takových oblastech, kde je obsah snadno spočítatelný a dělení přirozené.

4) Strategické zjednodušení: obdélníková podstava

Začneme proto případem, kdy je podstava obdélník

$$D = [a, b] \times [c, d].$$

Pak platí

$$S(D) = (b - a)(d - c),$$

a stejně snadno umíme spočítat obsahy všech pod-obdélníků vzniklých rozdělením. Obdélníky jsou navíc přirozenými „stavebními kameny“: umožňují formulovat dolní a horní součty, systematicky zjemňovat dělení a sledovat, jak se oba odhady přibližují. V okamžiku, kdy se v limitě dolní a horní odhady setkají, vzniká přirozená definice objemu tělesa pod grafem funkce dvou proměnných — a to je konceptuální zrod *dvojného integrálu*.

2 Metoda napsání textu

Text byl vygenerován ve spolupráci s LLM ChatGPT pomocí následujících promptů.

1. Píšu text pro studenty učitelství matematiky o dvojném integrálu. Od tebe bych chtěla pomoci s úvodní motivační kapitolou. Představuji si, že začneme problémem odhadu objemu tělesa, které máme dané dolní podstavou, která je tvořena množinou (obrazcem) v souřadné rovině xy . Nahoře je těleso ohraničené grafem funkce dvou proměnných. Uvažujeme funkci s nezápornými hodnotami. Pomocí dolního a horního odhadu funkčních hodnot dostaneme dolní a horní odhad objemu. Používáme zde vlastnost objemu: je-li A podmnožina B , pak je objem $A \leq$ objemu B .

Dalším krok je rozdělení podstavy na části a použití pravidla: pokud nemají A , B společné vnitřní body, Pak je objem sjednocení A , B roven součtu objemů A , B .

Objem ve výše uvedených případech počítáme jako součin obsahu podstavy a výšky. Slabé místo je výpočet obsahu podstavy. Proto se v prvním kroku omezíme na obdélníkovou podstavu, pro kterou obsah spočítat umíme.

Sepiš motivační úvod podle instrukcí výše.

2. Nyní vysázej celý text v latexu. Zvaž ilustraci obrázkem, který vytvoř pomocí balíku tikz.
3. Ve 3D obrázku v jednom z obdélníků vyznač hranoly o výškách m_i , M_i pro demonstraci vzorce i monotonii objemů. Vzorec textu označ číslem (standardním způsobem z latexu) a v popisku obrázku se na něj odkaž.
4. Obrázek zařaď mezi body 1) Nejprve odhad a 2) Zpřesnění.