

Limity funkce dvou proměnných

Text pro studenty učitelství matematiky

5. prosince 2025

1 Definice limity funkce dvou proměnných

Definice 1. Nechť f je funkce dvou proměnných s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť bod $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ je hromadným bodem množiny D . Číslo $L \in \mathbb{R}$ nazveme **limitou funkce f v bodě A** , jestliže pro **každé** $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro **každý** bod $X = (x, y) \in D$, pro který platí $0 < d(X, A) < \delta$, je splněna nerovnost:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad (1)$$

kde $d(X, A) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$ je **eukleidovská vzdálenost** bodů X a A . Tuto skutečnost zapisujeme:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$

Poznámka 2. V definici limity požadujeme, aby bod A , ve kterém počítáme limitu, byl hromadný bod definičního oboru funkce f , ze které počítáme limitu. Je to proto, že v definici požadujeme splnění vztahu (1) pro body X z prstencového okolí $P(A, \delta) := B(A, \delta) \setminus \{A\}$.

Pokud by A nebyl hromadným bodem definičního oboru, tak by prstencové okolí bylo pro malé hodnoty δ prázdnou množinou. Limitou by pak bylo jakékoliv reálné číslo L .

2 Nutná podmínka existence limity (test po přímkách/křivkách)

Pro existenci limity funkce dvou proměnných v daném bodě je nutné, aby hodnota, ke které se funkce blíží, **nezávisela na cestě**, po níž se k tomuto bodu blížíme.

Tuto myšlenku zformulujeme v následující větě. Důkaz věty je přímým důsledkem definic.

Věta 3 (nutná podmínka). *Jestliže limita funkce $f(x, y)$ v bodě (a, b) existuje a rovná se L , pak se limita funkce f po **každé křivce** procházející bodem (a, b) musí rovnat L .*

Formálně zapsáno:

Nechť má funkce f v bodě $A[a, b]$ limitu rovnou L . Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ a funkce

$$x : t \mapsto x(t), \quad y : t \mapsto y(t)$$

jsou spojité v bodě t_0 a platí $x(t_0) = a$, $y(t_0) = b$.

Pak platí

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t)) = L$$

Poznámka 4. Pro funkci jedné proměnné jsou směry, ve kterých se můžeme blížit k limitnímu bodu, jen dva, zleva a zprava a odpovídají jim jednostranné limity.

Rovnost jednostranných limit je pro funkci jedné proměnné podmínkou nutnou a postačující pro existenci limity.

V příkladě 7 uvidíme, že pro funkci dvou proměnných je tato podmínka nutná, ale není postačující.

Důsledek 5 (neexistence limity). *Pokud se k bodu (a, b) přiblížíme po **dvou různých cestách** (např. přímkách, parabolách) a výsledné limity se **liší**, pak původní limita $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ **neexistuje**.*

3 Příklady

Příklad 6 (limita závisí na směru přímky). Uvažujeme funkci $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Zjišťujeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$.

Test po osách:

- Po ose x ($y = 0$): $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2+0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$.
- Po ose y ($x = 0$): $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$.

Konstatování: Shoda limit po osách existenci limity nezaručuje.

Test po přímce $y = x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Závěr: Protože $0 \neq \frac{1}{2}$, limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ **neexistuje**.

Příklad 7 (limita je stejná po všech přímkách, ale odlišná po parabole). Uvažujeme funkci $k(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. Zjišťujeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} k(x, y)$.

Test po libovolné přímce ($y = kx$)¹:

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(kx)^2}{x^2 + (kx)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^3}{x^2(1 + k^4 x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2} = 0$$

Konstatování: Všechny limity po přímkách jsou 0.

Test po parabole ($x = y^2$): Zvolíme cestu $x = y^2$ (neboli $y = \sqrt{x}$):

$$\lim_{y \rightarrow 0} k(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(y^2)y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Závěr: Protože $0 \neq \frac{1}{2}$, limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ **neexistuje**. Tento příklad dokazuje, že test po přímkách je pouze **nutná**, nikoliv postačující podmínka.

Příklad 8 (limita existuje). Uvažujeme funkci $h(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$. Zjišťujeme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y)$.

Přístup polárními souřadnicemi ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$):

$$h(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{(r \cos \varphi)^2 (r \sin \varphi)}{r^2} = \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2} = r \cos^2 \varphi \sin \varphi$$

Pro $r \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (r \cos^2 \varphi \sin \varphi)$$

Víme, že $r \rightarrow 0$ a $|\cos^2 \varphi \sin \varphi| \leq 1$ (výraz je **omezený**). Podle věty o součinu nulové a omezené funkce (která je důsledkem věty o sevřené funkci též zvané věta o dvou policajtech) je:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \cdot (\text{omezený výraz}) = 0$$

Závěr: Limita **existuje** a je rovna 0.

¹Tady jazykový model zapomněl na přímku $x = 0$. Ověřte, že limita po této přímce vyjde také nula.

²To je jen půlka paraboly. Další nepřesnost od jazykového modelu.