

# Úlohy na metrické prostory

úlohy z an3, 2025/26

- 1a Ukažte, že zobrazení  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  splňuje axiomy normy

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$$

- 1b

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- 1c

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

- 2a Zjistěte, zda zobrazení  $\varrho$  splňuje na množině  $\mathbb{R}$  axiomy metrického prostoru.

$$\varrho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$$

- 2b

$$\varrho(x, y) = (x - y)^2$$

- 2c

$$\varrho(x, y) = \sqrt[3]{x - y}$$

- 2d

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

- 2e

$$\varrho(x, y) = |x - y|$$

3. Na přednášce jsme ukázali, že množina  $A$  v metrickém prostoru je otevřená právě když je její doplněk uzavřená množina. Ukažte, že odtud plyne tvrzení:

Množina  $A$  v metrickém prostoru je uzavřená právě když je její doplněk otevřená množina.

- 4a Vypočtěte limitu posloupnosti  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  v metrickém prostoru  $\mathbb{R}^2$  s euklidovskou metrikou.

$$a_n = \left( \frac{2n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}}{n + 2}, (1 + 1/n)^n \right)$$

4b

$$a_n = \left( n + 1 - \sqrt{n^2 + n + 1}, \frac{(2n^3 + 1)^2}{(3n^2 + 1)^3} \right)$$

5. Následující dvě úlohy ukazují charakterizaci hromadných bodů množiny  $A \subseteq M$  v metrickém prostoru  $(M, d)$ .

5a Nechť  $x \in A$ . Ukažte, že bod  $x$  je hromadným bodem množiny  $A$  právě když není izolovaným bodem množiny  $A$ .

5b Nechť  $x \notin A$ . Ukažte, že bod  $x$  je hromadným bodem množiny  $A$  právě když je hraničním bodem množiny  $A$ .

6. Nechť  $(M, d)$  je metrický prostor,

$$x_1, x_2, x_3 \in M, \quad r_4 = \max\{1, 1 + d(x_1, x_2), 1 + d(x_1, x_3)\}$$

Ukažte, že pro  $x_4 \in M$  takové, že  $d(x_1, x_4) \geq r_4$ , platí

$$\forall m \in \mathbb{N}, m < 4 : d(x_m, x_4) \geq 1$$

7. Uvažujme metrický prostor  $(\mathbb{R}^2, d)$  s euklidovskou metrikou

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{pro } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

Ukažte, že funkce  $g(x) \equiv g(x_1, x_2) = x_2$  je spojitá na  $\mathbb{R}^2$ .

V prostoru obrazů  $\mathbb{R}$  uvažujeme euklidovskou metriku  $d(x, y) = |x - y|$ .

8. Nechť  $(M, d)$  je metrický prostor,  $A \subseteq B \subseteq M$ ,  $f$  je funkce spojitá na množině  $B$ .

Ukažte, že je  $f$  spojitá na  $A$ .