

ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

každý polynom $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$

stupně $n \geq 1$ s komplexními koeficienty

$a_k \in \mathbb{C}$, $k=0, \dots, n$, $a_n \neq 0$

ma' alespoň jeden komplexní kořen,

tj. $(\exists z_0 \in \mathbb{C})(P(z_0)=0)$

Hlavní myšlenka důkazu:

Budeme zkoumat obrazy kružnice

$$(K) \quad z_n(t) = r(\cos t + i \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

líme polynomem, tedy uzavřené
obrázky o rovnici

$$(V) \quad w_n(t) = P(z_n(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

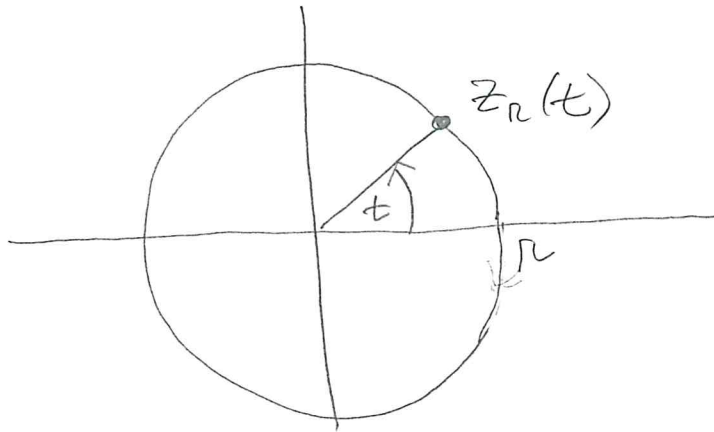
a ukážeme, že existuje $r_0 \in (0, +\infty)$

takové, že (V) prochází počátkem,

tedy $w_{r_0}(t) = 0$ pro alespoň jedno $t \in [0, 2\pi]$

$z_0 = z_{r_0}(t) = r_0(\cos t + i \sin t)$ je pak kořen P

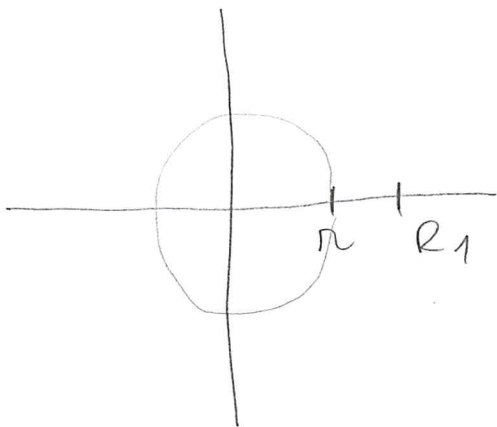
Křivka (K): $z_r(t) = r(\cos t + i \sin t)$



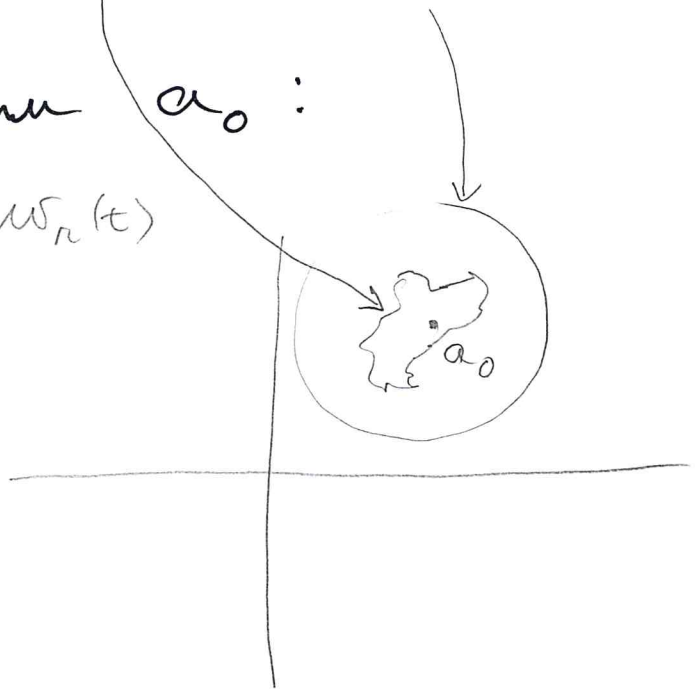
Podívejte se na obrázek, jak vypadají křivky (U).

V dalším ukážeme existenci R_1 , že pro $r < R_1$ je (U) v okolí absolutního ztenu a_0 :

$z_r(t)$



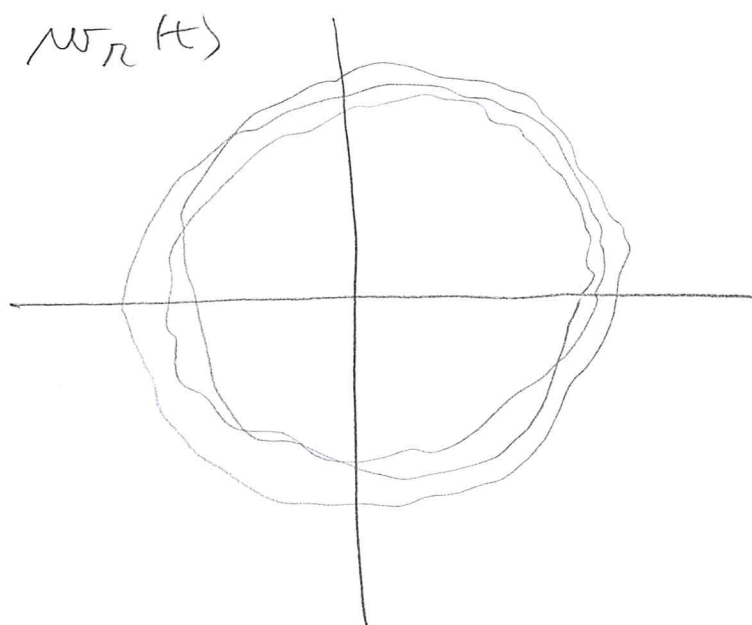
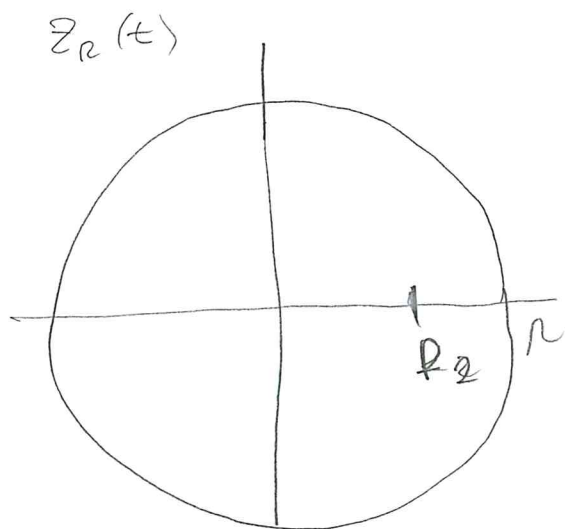
$w_r(t)$



a existenci $R_2, \bar{z}$ pro $R > R_2$

(v) n -krát (n je stupeň polynomu)

oběhne počátek



Pro jednodušší vyjádření (zápis)
budeme zkoumat polynom stupně $n=5$

$$P(z) = z^5 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_0,$$

$$a_0, a_2, a_3 \in \mathbb{C}, \quad a_0 \neq 0 \quad (\text{jinak máme kořen } z_0=0)$$

(V) pro malé hodnoty z

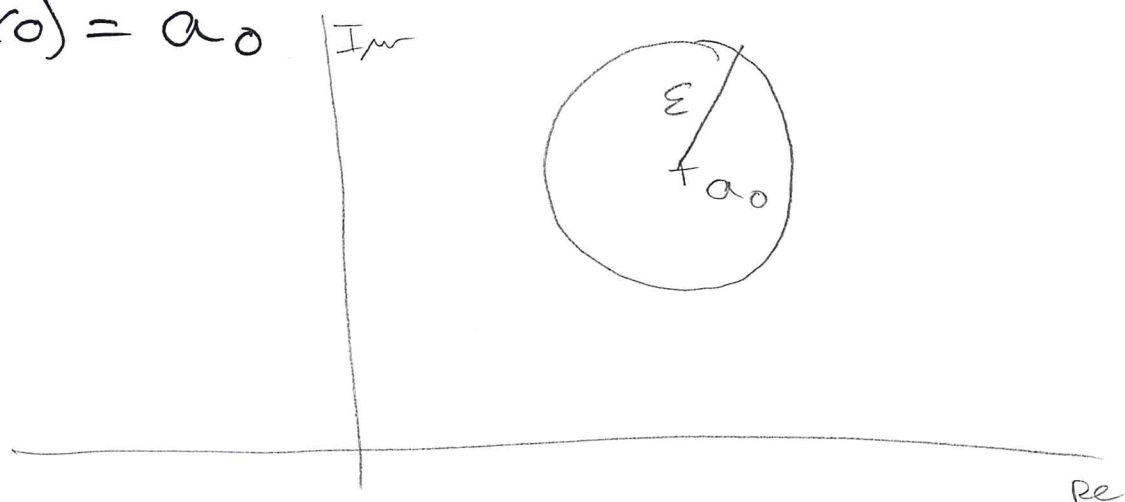
P je funkce spojitá v bodě $z_0=0$,
proto k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že
pro $|z| < \delta$ je $|P(z) - P(0)| < \varepsilon$

$$\text{oznámme: } R_1 \equiv \delta$$

Pak pro $R < R_1$ je obraz (V)

okružnice (K) v ε -okolí

$$\text{bodů } P(0) = a_0$$

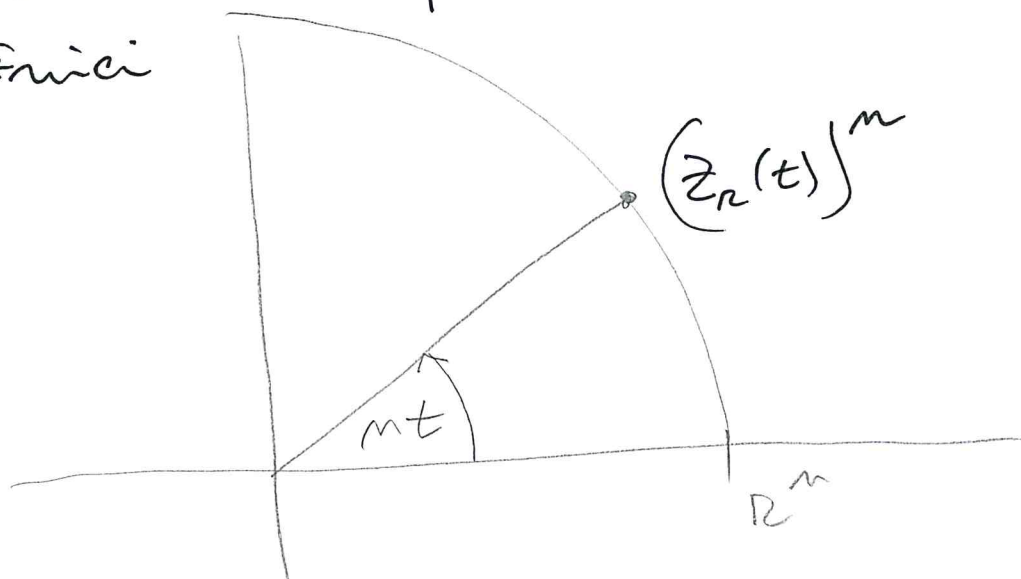


(V) pro velké hodnoty n

křivka

$$t \mapsto (z_n(t))^n$$

oběhne n -krát počátek
po kružnici



Upravíme:

$$P(z) = z^5 \left(1 + \frac{a_3}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \frac{a_0}{z^5} \right) \quad (*)$$

Substitucí $z = \frac{1}{z}$ převedeme výraz

na závorek na

$$Q(z) = 1 + a_3 z^2 + a_2 z^3 + a_0 z^5$$

Stejnou argumentací, jako pro malá n
dostaneme: ke $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$\text{pro } |z| < \delta \text{ je } |Q(z) - Q(0)| < \varepsilon$$

Převodeme z, Q zát z, P :

$$|z| = \left| \frac{1}{z} \right| < \delta \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\delta}$$

→ další ořezání

$$R_2 \equiv \frac{1}{\delta}$$

$$Q(z) = 1 + a_3 z^2 + a_2 z^3 + a_0 z^5 =$$

$$= 1 + \frac{a_3}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \frac{a_0}{z^5} \quad (**)$$

$$Q(0) = 1$$

z (*), (**) plyne

$$Q(z) = \frac{P(z)}{z^5}$$

Tedy

$$\varepsilon > |Q(z) - Q(0)| = \left| \frac{P(z)}{z^5} - 1 \right|$$

a to upravíme

$$\left| \frac{P(z)}{z^5} - 1 \right| = \frac{|P(z) - z^5|}{|z|^5} = \frac{1}{R^5} |P(z) - z^5|$$

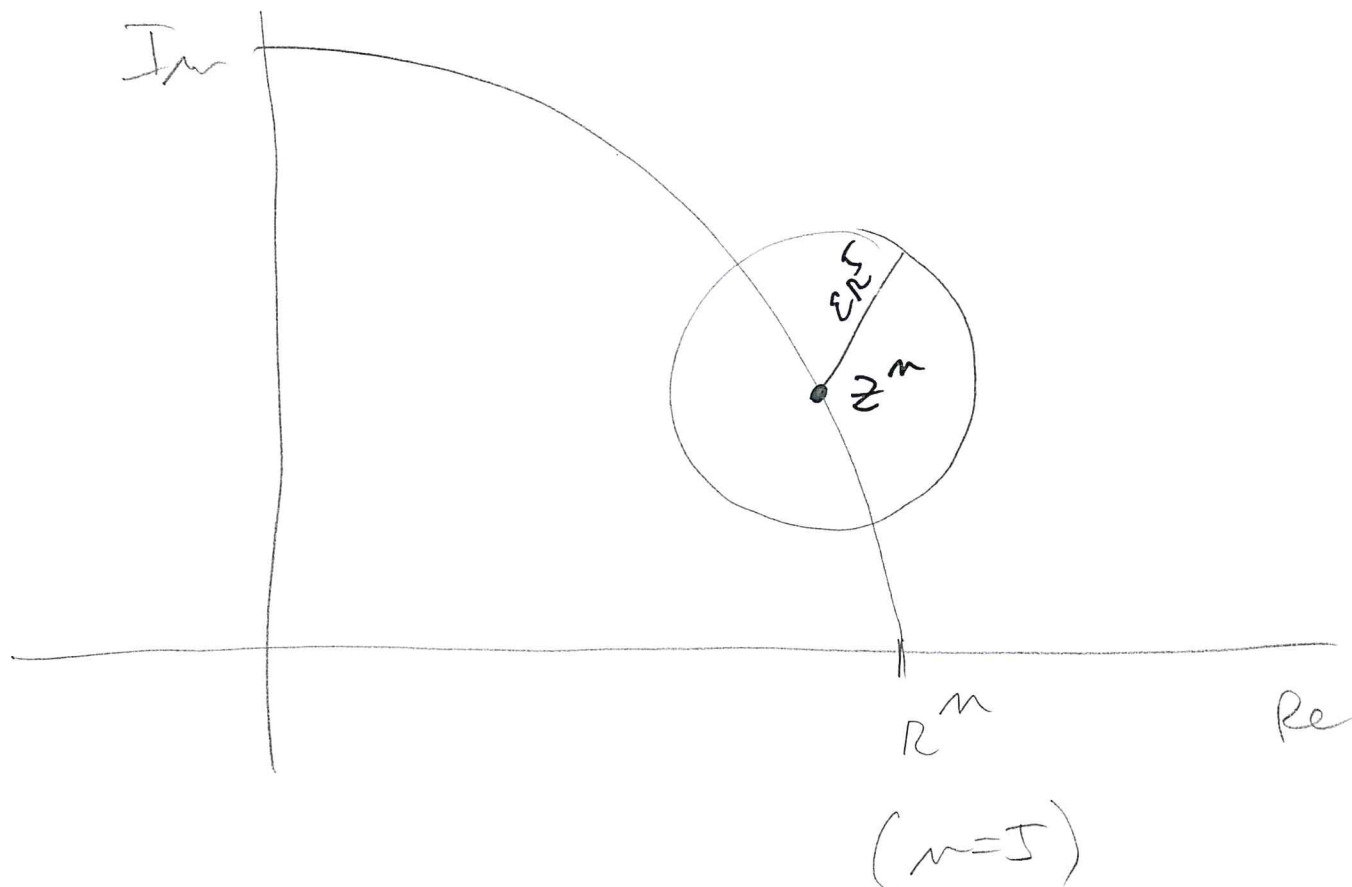
$$(|z| = R)$$

dostaneme

$$\frac{1}{R^J} |P(z) - z^J| < \varepsilon$$

tedy

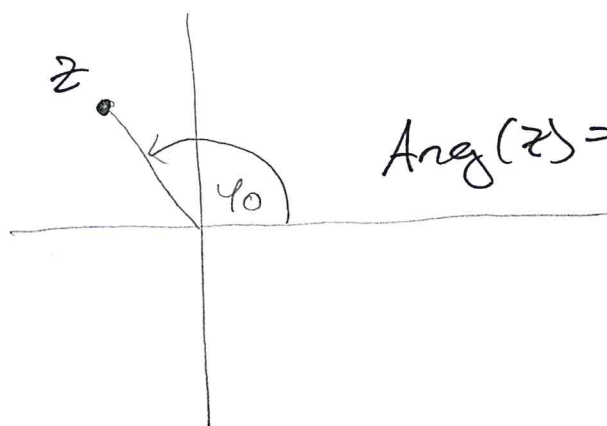
$$|P(z) - z^J| < \varepsilon R^J$$



Tedy body křivky (U) pro $R > R_2$ jsou v kruhu o poloměru εR^n , jehož střed obíhá krát po kružnici o poloměru R^n se středem v počátku.

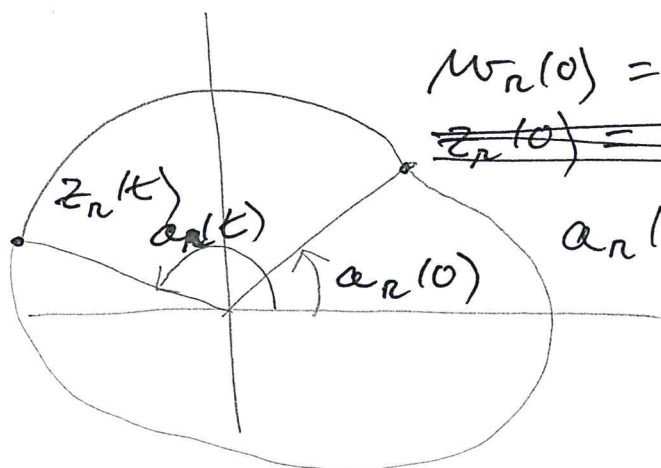
Počet "obětí" křivky (γ) okolo počátku bude měnit pomocí funkce argument - žádná se o vícehodnotovou funkci - obraz není čísla, ale množina čísel

$$\text{Arg}(z) = \{ \varphi \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \}$$



$$\text{Arg}(z) = \{ \varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

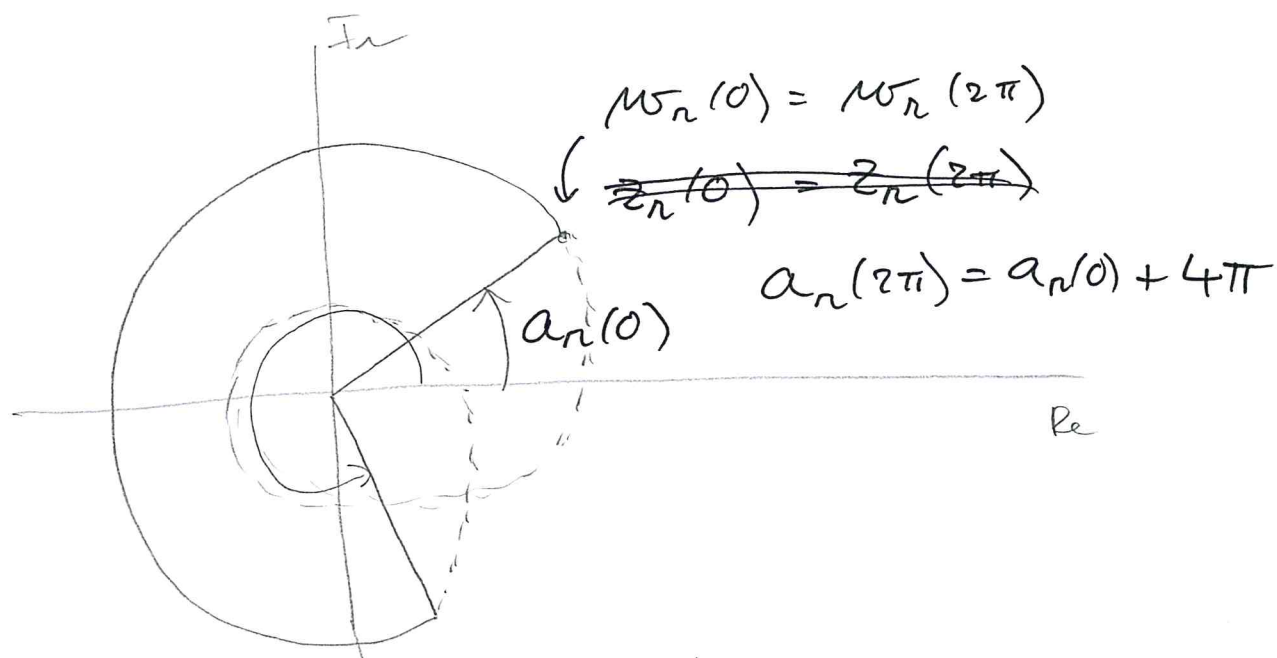
Ukážeme, že pro křivky (γ), které reprochávají počátek existuje spojitá funkce a_n , pro kterou platí
 $a_n(t) \in \text{Arg}(z_n(t))$ $\text{Arg}(w_n(t))$



$$w_n(0) = w_n(2\pi)$$

$$\cancel{z_n(0)} = \cancel{z_n(2\pi)}$$

$$a_n(2\pi) = a_n(0) + 2\pi$$

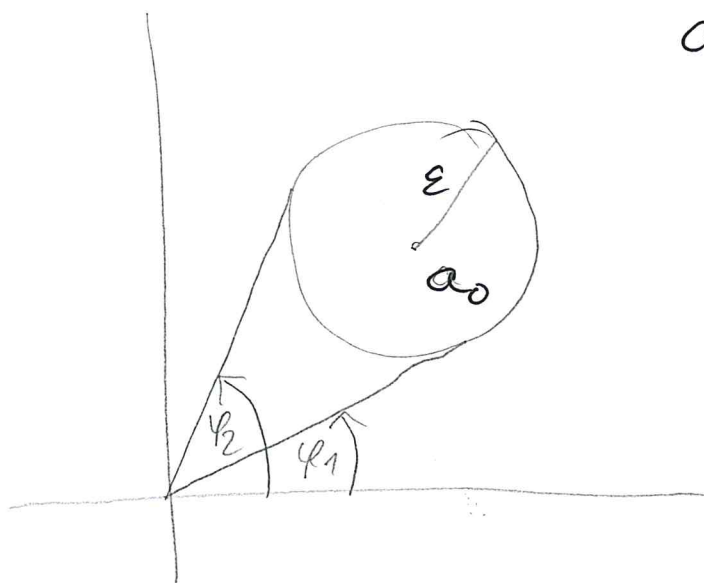


Počet obětů křivky (ν) pak je

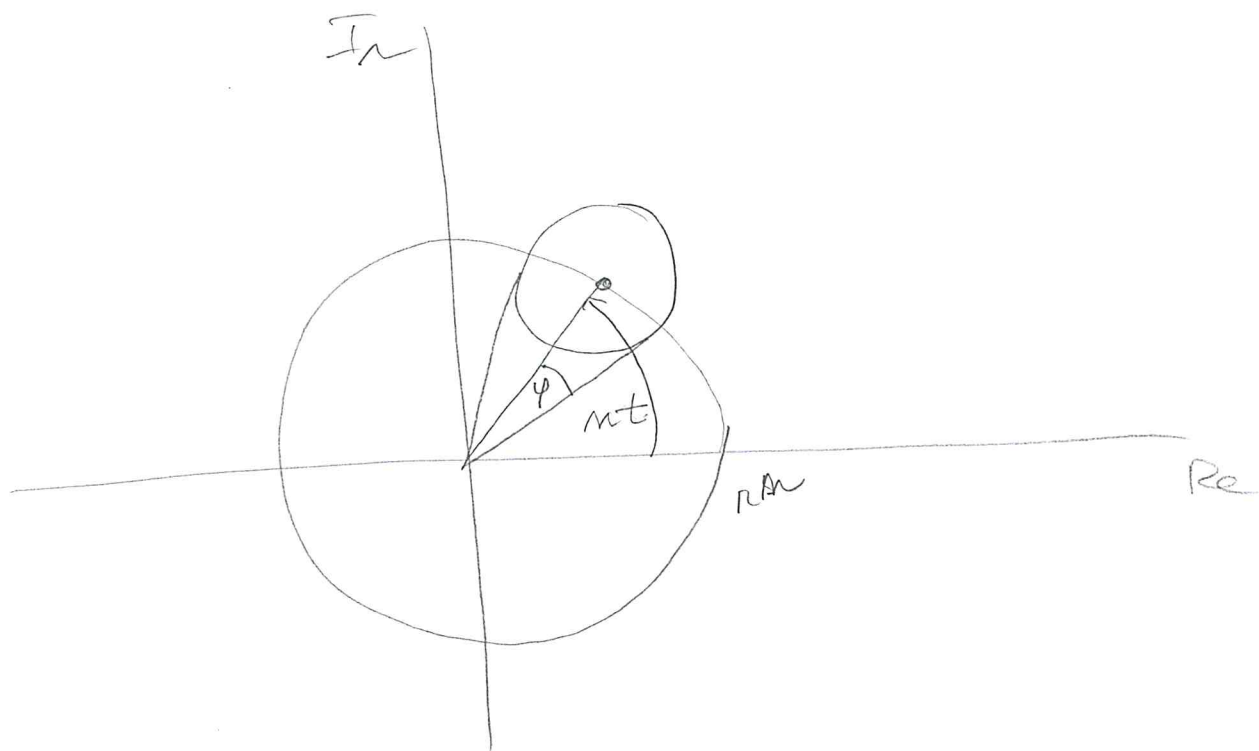
$$\ell(n) = \frac{a_n(2\pi) - a_n(0)}{2\pi}$$

Pro $r < R_1$ je $a_n(t) \in [\varphi_1, \varphi_2]$,

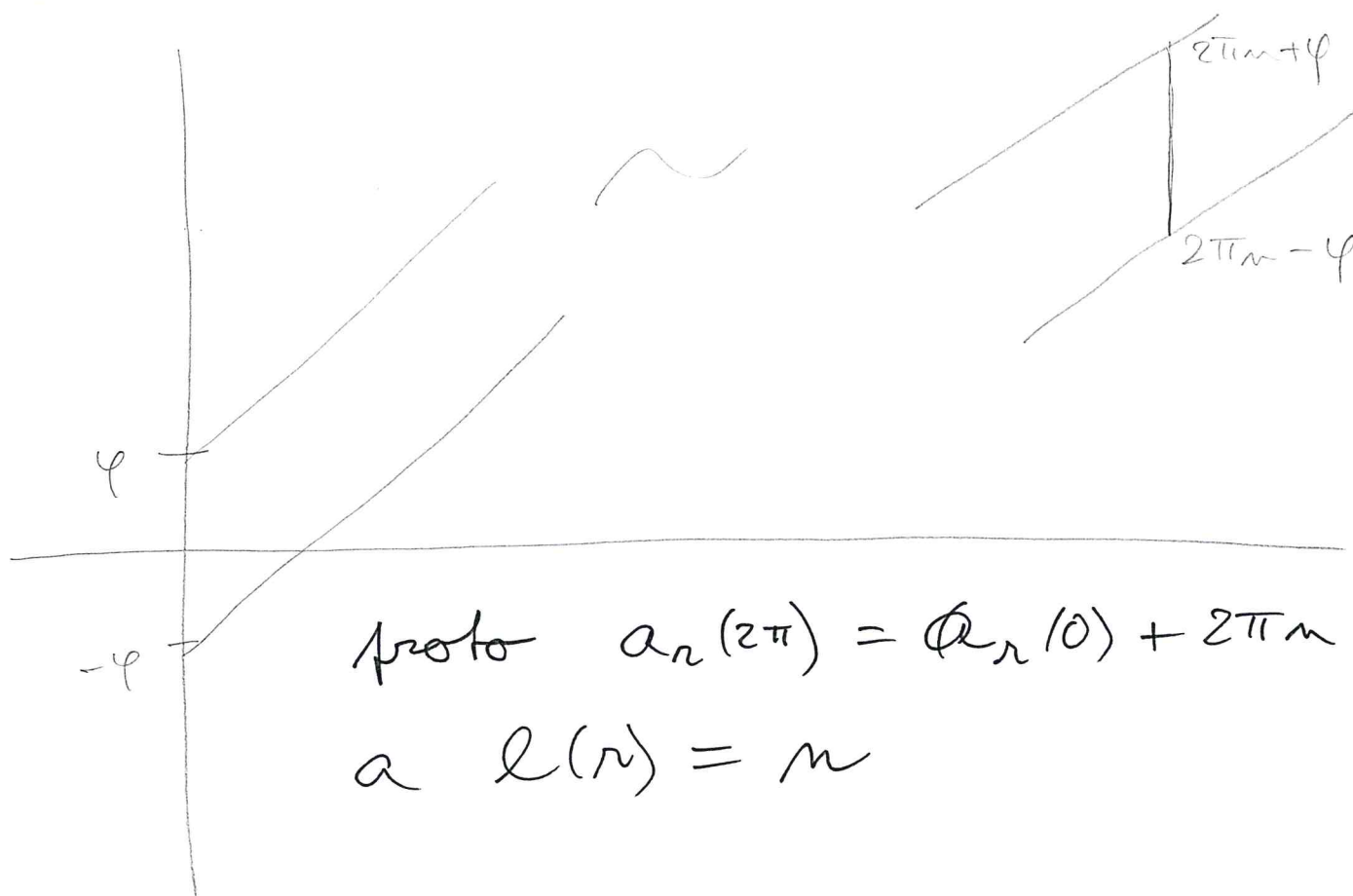
a tedy $\ell(n) = 0$



Pro $n > 0$



$$\text{je } a_n(t) \in [nt - \varphi, nt + \varphi],$$

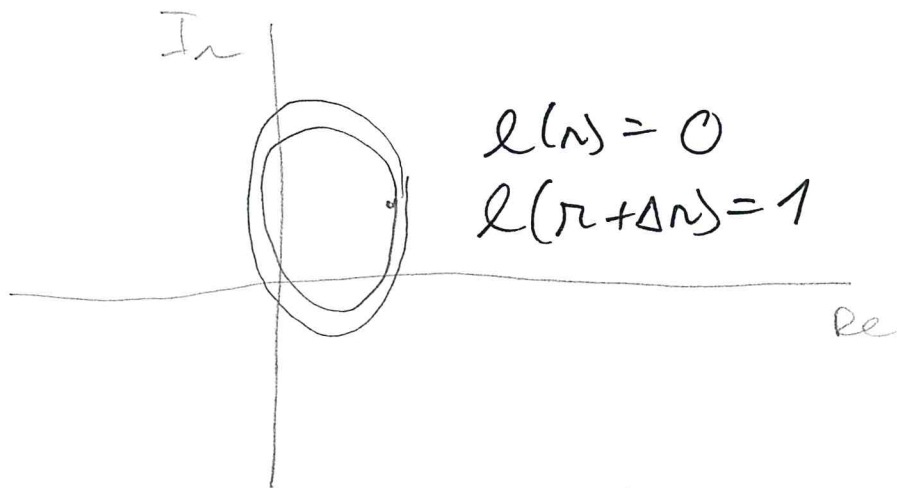


9
Dále víme: $l(n) \in \mathbb{Z}$

zbývá ukázat, že hodnota $l(n)$

maí v bodě n nespojitost pouze

v případě, že křivka (U) prochází
počátkem



Protože pro $n < R_1$ je $l(n) = 0$,

pro $n > R_2$ je $l(n) = n$,

$l(n) \in \mathbb{Z}$,

maí l v nějakém bodě nespojitost,

příslušná křivka (U) prochází počátkem

a na jejím vzoru (k) tedy

leží kořen polynomu P .