Okruhy ke státní závěrečné zkoušce	
Název studijního programu	Matematika
Kód studijního programu	B0541A170015
Typ studia	bakalářský
Forma studia	prezenční
Specializace	
Platnost od	2022/2023

Matematika

Pokyny: *Student dostane postupně tři otázky, jednu z každého zkoušeného okruhu. U každé otázky má 20 minut na přípravu. Každou otázku zkouší vybraní členové komise.*

- **Algebra a geometrie**

1. Relační a algebraické: relace a jejich vlastnosti (reflexivnost, symetrie, antisymetrie, tranzitivita); ekvivalence a rozklad množiny na třídy ekvivalence, uspořádání. Příklady algebraických struktur.
2. Algebraické struktury s jednou opearcí: grupoid, monoid, pologrupa, abelovské a neabelovské grupy, řád prvku, generátor, cyklické grupy, podgrupa, normální podgrupa, levé a pravé třídy.
3. Algebraické struktury se dvěma operacemi: komutativní okruh, obor integrity, dělitelnost v oborech integrity (asociované, invertibilní, ireducibilní prvky); konečná (Galoisova) tělesa, nekonečná tělesa (příklady, algebraický uzávěr, algebraicky uzavřené těleso), nekomutativní tělesa (příklady).
4. Vektory a matice: lineární vektorový prostor (báze a dimenze prostoru), maticové násobení, hodnost matice, inverzní matice, determinant a jeho základní vlastnosti, matice jako lineární zobrazení (nulový prostor, obor hodnot matice).
5. Soustavy lineárních algebraických rovnic (SLAR): existence a jednoznačnost řešení (Frobeniova věta). Metody řešení SLAR: finitní metody (Gaussova eliminace jako LU rozklad, Choleského rozklad), stacionární iterační metody (Jacobiho, Gauss-Seidelova, SOR), Krylovovské metody (CG).
6. Norma vektoru a skalární součin vektorů a ortogonalita. Ortogonální matice, základní příklady ortogonálních matic a jejich geometrická interpretace, QR rozklad matice a Gramova–Schmidtova ortogonalizace.
7. Polynomy a vlastní čísla matic: kořeny polynomů (základní věta algebry), vlastní číslo a vektor, charakteristický polynom, podobnostní transformace, Schurova věta.

Technická univerzita v Liberci | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1 | www.fp.tul.cz

Výpočet vlastních čísel: mocninná metoda, shift-invert, Arnoldiho a Lanczosova metoda, QR algoritmus.
8. Normální matice a Jordanův tvar: vlastní čísla a vektory normálních matic, příklady normálních matic, obecné diagonalizovatelné matice, Jordanův blok, Jordanův tvar a defektní matice.
9. Citlivost úlohy vs. numerická stabilita algoritmu např. při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic
10. Singulární rozklad (SVD) a jeho aplikace (pseudoinverzní matice, kanonické úhly mezi podprostory, řešení úlohy nejmenších čtverců.

- **Matematická analýza**

1. Limity posloupností a funkcí, spojitost funkcí jedné reálné proměnné: Rozšířená reálná osa, definice limity posloupností a funkcí, věty o aritmetice limit, věta o sevření, věta o limitě složené funkce. Operace zachovávající spojitost. Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu (Darbouxova vlastnost, stejnoměrná spojitost, nabývání extrémů, obraz intervalu).
2. Definice základních funkcí: Definice funkcí exp, log, sin, cos, tg, cotg, arcsin, arccos, arctg, arccoth, sinh, cosh v reálném a komplexním oboru. Základní limity, základní vlastnosti.
3. Derivace funkcí jedné proměnné, věty o střední hodnotě: Definice derivace v bodě a na intervalu, věta o aritmetice derivací, derivace složené funkce, Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě, vztah monotonie a derivace, nutné a postačující podmínky existence lokálních extrémů. Vztah konvexity a druhé derivace.
4. Newtonův, Riemannův a Lebesgueův integrál: Definice a základní vlastnosti (linearita, pozitivita, monotonie, aditivita vzhledem k integračnímu oboru). Metody výpočtu Newtonova integrálu. Integrovatelnost spojitých funkcí, Newton-Leibnizova formule. Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu. Limitní věty (Fatouovo lemma, Lebesgueova věta, Leviho věta), derivace integrálu závislého na parametru. Fubiniova věta, věta o substituci.
5. Metrické prostory: Definice metrických prostorů. Otevřená, uzavřená množina, hranice množiny, kompaktní množina, vzájemné vztahy. Konvergence posloupností v MP, úplné MP. Spojité funkce na MP a jejich vlastnosti (Heineho věta – ekvivalence sekvenciální spojitosti a spojitosti, nabývání extrémů na kompaktních množinách).
6. Diferenciální počet funkcí více proměnných: Derivace ve směru/parciální derivace, gradient, diferencovatelnost, vztah spojitosti a diferencovatelnosti. Gateauxova derivace, vztah ke spojitosti. Jacobiova matice, geometrický význam řádků a sloupců. Řetízkové pravidlo. Extrémy funkcí více proměnných (nutné a postačující podmínky), vázané extrémy, Lagrangeova funkce.
7. Číselné řady, posloupnosti řad a funkcí: Posloupnosti řad a funkcí. Kritéria konvergence řad, absolutně a neabsolutně konvergentní řady, bodová a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí (a jejich vztah). Mocninné řady, poloměr a střed konvergence, příklady. Laurentovy řady. Derivace mocninné řady člen po členu.
8. Aproximace funkcí: Weierstrassova věta o aproximaci spojité funkce polynomem. Taylorovy řady, Lagrangeův tvar zbytku, Fourierovy řady, Fourierovy koeficienty, konvergence Fourierových řad.
9. Diferenciální rovnice: Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy, řešení rovnic prvního řádu, rovnice vyšších řádů, lineární rovnice a lineární rovnice s konstantními koeficienty, soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu, metoda variace konstant.

10. Funkcionální analýza: Normované lineární prostory, prostory se skalárním součinem. Banachovy a Hilbertovy prostory, lineární operátory, princip stejnoměrné omezenosti, konvergence operátorů, spektrum, kompaktní operátory.

- **Numerická matematika, pravděpodobnost a statistika**

1. Lagrangeova a Hermiteova interpolace, existence a jednoznačnost, odhady chyby, Rungeho jev. Definice splinu k-tého řádu, konstrukce lineárního a kubického interpolačního splinu, odhady chyby.
2. B-spliny a jejich vlastnosti, pozitivita, kompaktní nosič, symetrie, rozklad jednotky, derivace, rekuretní vztah, explicitní tvar, Marsdenova identita, polynomiální přesnost, B-splinová báze prostoru splinů.
3. Nelineární rovnice, existence řešení, jednoznačnost a prosté iterace. Metoda bisekce, algoritmus a chyba. Newtonova metoda a metoda sečen, odvození, geometrická interpretace, věty o konvergenci, odhady chyby, řád konvergence.
4. Numerický výpočet integrálu. Newton-Cotesovy vzorce, jednoduché a složené obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo, odvození, odhady chyby.
5. Jednokrokové metody pro obyčejné diferenciální rovnice, předpis, řád metody. Eulerova metoda, geometrická interpretace, odhad chyby, stabilita. Rungeho-Kuttovy metody, idea, odvození, vlastnosti.
6. Slabé řešení okrajové úlohy 2. řádu. Lax-Milgram lemma. Diskétní formulace a Galerkinova approximace. Základní myšlenky metody konečných prvků (MKP). Prostory KP a báze pro 1D úlohy. Příklady lagrangeovských KP na intervalu. Koncept referenčního KP. Obecné úvahy o konvergenci MKP. Základní odhady chyb přibližného řešení.
7. Pravděpodobnost, podmíněná pravděpodobnost, nezávislost náhodných jevů.
8. Náhodné veličiny a náhodné vektory, jejich rozdělení a základní charakteristiky. Základní typy diskrétních a spojitých rozdělení, nezávislost náhodných veličin, zákony velkých čísel, centrální limitní věta pro nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny.
9. Náhodný výběr, základy teorie odhadu a testování hypotéz, testy o parametrech normálního a binomického rozdělení, intervalové odhady.
10. Lineární model - jeho definice a využití ve statistické inferenci: testování submodelů, analýza rozptylu - jednoduché a dvojné třídění, mnohonásobné porovnávání. Základní lineární regresní modely, metoda nejmenších čtverců, rezidua.

Obsahová správnost	
Předkládající katedra	Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Jméno předkladatele	Doc. RNDr. Václav Finěk, Ph.D.

Technická univerzita v Liberci | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1 | www.fp.tul.cz