Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2022/23
NMgr. studium Učitelství matematiky pro 2. st. ZŠ, resp. SŠ

Datum zkoušky: ____________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{L} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ na standardním reálném čtyřrozměrném prostoru, které zobrazuje $v_j \longrightarrow w_j = \mathscr{L}(v_j)$, $j = 1, \ldots, 4$. Konkrétně např.:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Nalezněte matici zobrazení a matici zobrazení inverzního, pokud existuje.

2 Dokažte (např. indukcí), že pro komplexní čísla a a b a přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^{n-\ell} b^{\ell}.$$

3 Uvažujme funkci dvou proměnných

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^4.$$

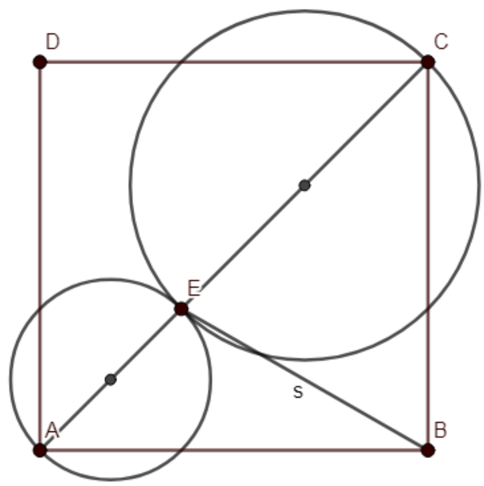
Ověřte, že $(0,0)$ je stacionární bod f. Rozhodněte, zda se jedná o lokální minimum, maximum, nebo něco jiného.

4 Nalezněte přirozené číslo n, $0 < n < 1001$, takové (pokud existuje), aby

$$395 \cdot n \equiv 1 \pmod{1001},$$

tj. 395^{-1} v modulárním okruhu $\mathbb{Z}_{1001}$.

5 Uvažujte čtverec $ABCD$, dvě kružnice se středy na úhlopříčce AC procházející body A a C a dotýkající se v bodě E; viz obrázek. Označme s délku úsečky BE.



Vyjádřete součet obsahů obou kruhů v závislosti na parametru s.

1) Nechť A je matice zobrazení. Pak

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \quad \text{dle zadání.}$$

6

Tj.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

---

2)

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{l=0}^{0} \binom{0}{l} a^{0-l} b^{l} = \binom{0}{0} a^0 b^0 \quad ✓ \qquad (4)$$

$$(a+b)^1 = (a+b) = \sum_{l=0}^{1} \binom{1}{l} a^{1-l} b^{l} = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \quad ✓$$

$\boxed{\text{ind. předp.}}$

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^{l} \qquad (4)$$

$\boxed{\text{dokazujeme}}$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) \qquad (4)$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} b^{l} \right) (a+b)$$

$$= \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k+1-l} b^{l} \right) + \left(\sum_{l=0}^{k} \overbrace{\ }^{\binom{k}{l}} a^{k-l} b^{l+1} \right)$$

(4)

$$= \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k+1-l} b^{l} \right) + \left(\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} a^{k+1-l} b^{l} \right)$$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} b^0 + \left(\sum_{l=1}^{k} \underbrace{\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{\binom{k+1}{l}} a^{k+1-l} b^{l} \right) + \binom{k}{k} a^0 b^{k+1} \quad ✓$$

(4) $\square$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y$ 4 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ 2

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2y + 4y^3$ 4 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ 2

$\longrightarrow$ jedná se o stacionární bod

8

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^4 = (x-y)^2 + y^4 \geq 0$$

$\longrightarrow$ f je všude nezáporná $\Rightarrow$ $(0,0)$ je lok. min.

$$\left\{ f(x,y) = 0 \iff \left[(x-y) = 0 \;\&\; y^2 = 0\right] \iff x = y = 0 \right.$$

---

4) Eukleidův algoritmus

existuje

1001	395	211	184	27	22	5	2	1	0
		2	1	1	6	1	4	2	2
0	1	-2	3	-5	33	-38	185	-408	

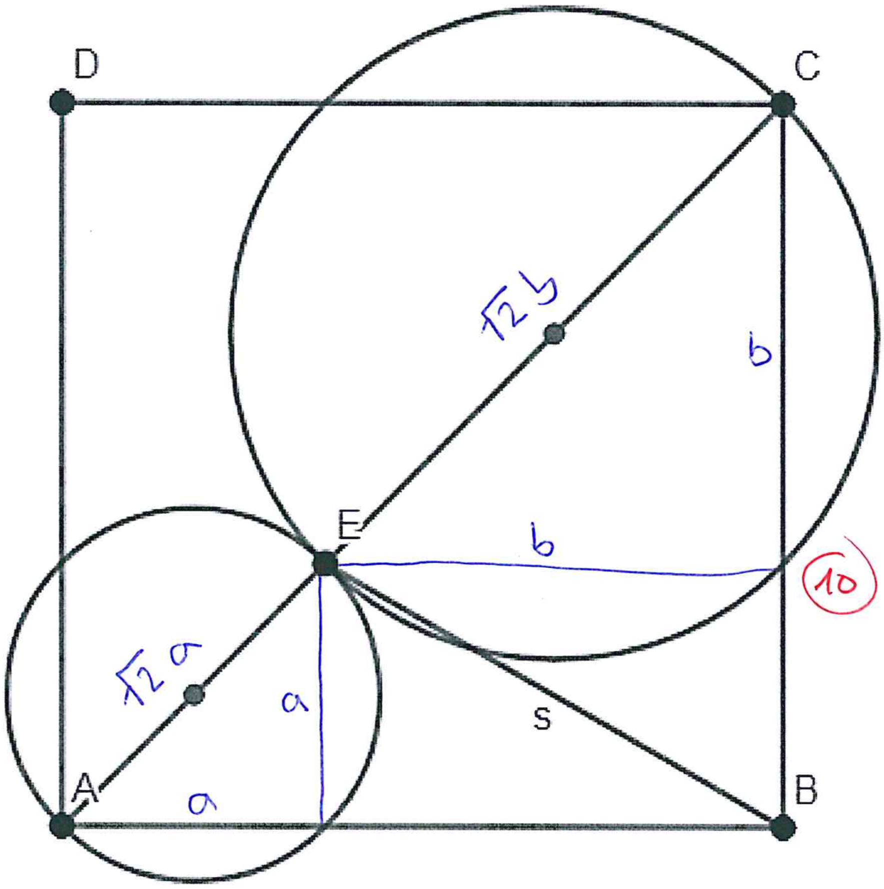
7

7

$$n \equiv -408 \equiv 1001 - 408 = 593 \pmod{1001}$$

6

5)



$$\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}a)^2 + \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}b)^2$$ (5)

$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + \frac{1}{2}\pi b^2 = \frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\pi s^2}$$ (5)