Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2021/22
Bc. studium Matematika se zaměřením na vzdělávání

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 0 (vzorový test)

Příklad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Celkem
Body											

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání (Pozor, zadání má dvě strany!)

1 (Úpravy výrazů) Zjednodušte výraz

$$\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \frac{b-a}{c+d}$$

a určete podmínky, za kterých výraz i provedená zjednodušení dávají smysl.

2 (Posloupnosti & řady) Truhlář rozřezal laťku 4 m dlouhou na deset dílů tak, že každý další díl laťky je o 6 cm delší, než díl předcházející. Jak dlouhý je nejkratší a nejdelší díl? Šířku řezu zanedbejte.

3 (Rovnice & nerovnice) Vyřešte nerovnici s absolutní hodnotou

$$|x-3| + 2 \cdot |x+1| > 4.$$

4 (Soustava rovnic) Početně nebo graficky nalezněte množinu řešení soustavy

$$2 \cdot (y-3) - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} \cdot (6 \cdot x + 1),$$
$$2 \cdot (y+5) + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cdot (1 - 7 \cdot x).$$

5 (Funkce & jejich grafy) Načrtněte graf funkce

$$f(x) = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 3$$

a vyznačte souřadnice zajímavých bodů.

Zadání (Druhá strana)

6 (Goniometrické funkce) Nalezněte všechna řešení rovnice

$$3 \cdot (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 - \sin(2 \cdot x) = 0.$$

7 (Kombinatorika & pravděpodobnost) Z pěti úseček délek

$$2\text{ cm},\ 3\text{ cm},\ 5\text{ cm},\ 7\text{ cm a } 11\text{ cm}$$

náhodně vybereme tři (tedy každá trojice má stejnou pravděpodobnost, že bude vybrána). Určete pravděpodobnost, že z vybraných úseček lze sestrojit trojúhelník.

8 (Komplexní čísla) Nalezněte absolutní hodnotu, reálnou a imaginární část čísla

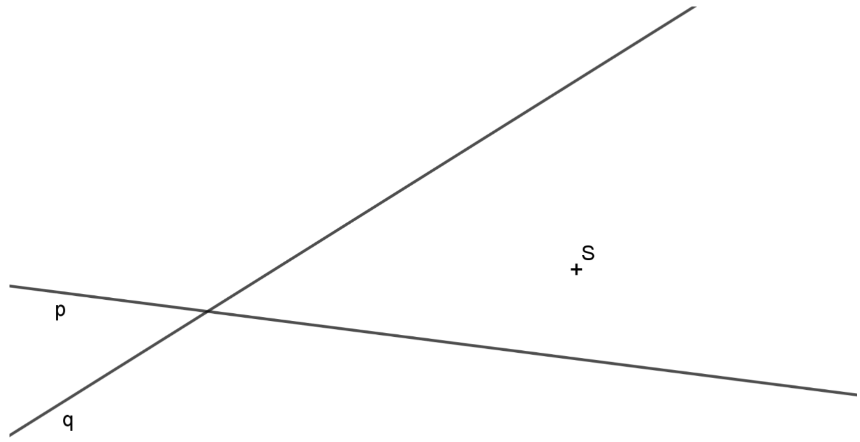
$$\frac{\mathbf{i}^{10} - \mathbf{i}}{2 \cdot \mathbf{i} + 1}.$$

9 (Analytická geometrie) Napište implicitní rovnici kružnice k procházející body

$$A[6, 1],\ B[8, 5] \text{ a } C[2, -1].$$

Načrtněte ilustrační obrázek.

10 (Konstrukční úloha) V rovině jsou dány dvě různoběžky p, q a bod S, který je vnitřním bodem ostrého úhlu, jenž různoběžky p a q svírají. Bod S přitom *neleží* na ose ostrého úhlu tvořeného přímkami p a q, viz obrázek 1. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby jeho vrchol A ležel na přímce p a vrchol C ležel na přímce q.



Obrázek 1: Zadání příkladu 10.

Poznámka: Nakreslete náčrtek, proveďte grafický rozbor, napište symbolický zápis konstrukce, uveďte diskusi řešení a konstrukci narýsujte.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

Řešení

Příklad 1 (Úpravy výrazů) (5 bodů celkem)

Podmínky (nenulové jmenovatele):

$$c^2 - d^2 \neq 0 \quad \& \quad \frac{b-a}{c+d} \neq 0 \quad \& \quad c+d \neq 0,$$

neboli

$$c \neq \pm d \quad \& \quad a \neq b \text{ (1 bod)}.$$

Zjednodušení:

$$\frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} : \frac{b-a}{c+d} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \cdot \frac{c+d}{b-a} \text{ (1 bod)} = \frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(c-d)\cdot(c+d)} \cdot \frac{c+d}{b-a} \text{ (1 bod)}$$
$$= \frac{(a+b)}{(c-d)} \cdot \frac{1}{-1} = \frac{a+b}{d-c} \text{ (2 body)}.$$

Příklad 2 (Posloupnosti & řady) (5 bodů celkem)

Označme délku prvního dílu a_1, druhého a_2, ... a obecně j-tého a_j. Platí že každý následující je o $d = 6$ (cm) delší než předchozí, tedy

$$a_j = a_{j-1} + d, \qquad \text{neboli} \qquad a_j = a_1 + (j-1)\cdot d$$

pro $j = 2, \ldots, n$ kde $n = 10$ (2 body).

Součet délek dílů je zřejmě roven

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}\cdot n \cdot (a_1 + a_n).$$

Celkem měla laťka 4 m $= 400$ cm, platí tedy

$$S_{10} = 400,$$
$$5\cdot(a_1 + a_{10}) = 400,$$
$$5\cdot(a_1 + (a_1 + 9\cdot 6)) = 400 \text{ (2 body)}.$$

Vyřešením poslední rovnice pro a_1 dostaneme $a_1 = 13$ a $a_{10} = 67$ (1 bod).

Příklad 3 (Rovnice & nerovnice) (5 bodů celkem)

Nulové body absolutních hodnot jsou zřejmě -1 a 3, řešení tedy budeme hledat izolovaně na třech podintervalech

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

(1 bod).

Je-li tedy x prvkem intervalu:

- $(-\infty, -1)$, pak se nerovnice zjednoduší na:

$$\begin{aligned} -(x-3) - 2\cdot(x+1) &> 4, \\ -3\cdot x + 1 &> 4, \\ -3\cdot x &> 3, \\ x &< -3. \end{aligned}$$

  Nerovnice je tedy splněna pro všechna $x \in (-\infty, -3)$ (1 bod).

- $(-1, 3)$, pak se nerovnice zjednoduší na:

$$\begin{aligned} -(x-3) + 2\cdot(x+1) &> 4, \\ x + 5 &> 4, \\ x &> -1. \end{aligned}$$

  Nerovnice je tedy splněna pro všechna $x \in (-1, 3)$ (1 bod).

- $(3, +\infty)$, pak se nerovnice zjednoduší na:

$$\begin{aligned} (x-3) + 2\cdot(x+1) &> 4, \\ 3\cdot x - 1 &> 4, \\ 3\cdot x &> 5, \\ x &> \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

  Nerovnice je tedy splněna pro všechna $x \in (3, +\infty)$ (1 bod).

Zbývá vyjasnit, že $x = -1$ řešením není $(4 + 2\cdot 0 \not> 4)$ a $x = 3$ řešením je $(0 + 2\cdot 4 > 4)$. Řešením nerovnice tedy jsou všechna

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \text{ (1 bod)}.$$

Příklad 4 (Soustava rovnic) (5 bodů celkem)

Asi nejrozumnější bude začít úpravou obou rovnic

$$\begin{aligned} 2\cdot(y-3) - \frac{1}{6} &= -\frac{1}{6}\cdot(6\cdot x + 1), \\ 2\cdot(y+5) + \frac{1}{7} &= \frac{1}{7}\cdot(1 - 7\cdot x), \end{aligned}$$

do co nejjednoduššího tvaru. Zbavíme se tedy všech závorek, členy s neznámými přeházíme na jednu (levou) stranu a dostaneme

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot y &= 6, \\ x + 2 \cdot y &= -10, \end{aligned} \text{ (2 body)}.$$

Nyní např. odečtením obou rovnic od sebe (tedy sčítací metodou) dostaneme formálně rovnici

$$0 = 16 \text{ (1 bod)},$$

kterou však zjevně nelze splnit pro žádné x a y. Množina řešení je tedy prázdná $\emptyset$ (2 body).

Alternativě můžeme v poslední dvojici rovnic identifikovat rovnice dvou přímek v rovině se stejným normálovým vektorem $\vec{n} = (1, 2)$, tedy i stejým směrovým vektorem $\vec{s} = (2, -1)$, procházející však různými body.

Dotřetice můžeme poslední dvojici rovnic interpretovat jako dvojici lineárních funkcí $y_1 = f_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 3$ a $y_2 = f_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot x - 5$ a technicky vzato zopakovat předchozí úvahu.

Příklad 5 (Funkce & jejich grafy) (5 bodů celkem)

Jedná se o kvadratickou funkci jejímž grafem je parabola. Koeficient u kvadratického členu je záporný, parabola tedy bude „otevřená dolů“ (1 bod). Zajímat by nás mohly průsečíky s osami. Průsečíky s osou x získáme řešením kvadratické rovnice,

$$-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 3 = 0.$$

Zřejmě

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{-4} = \frac{3}{4} \mp \frac{\sqrt{-15}}{4},$$

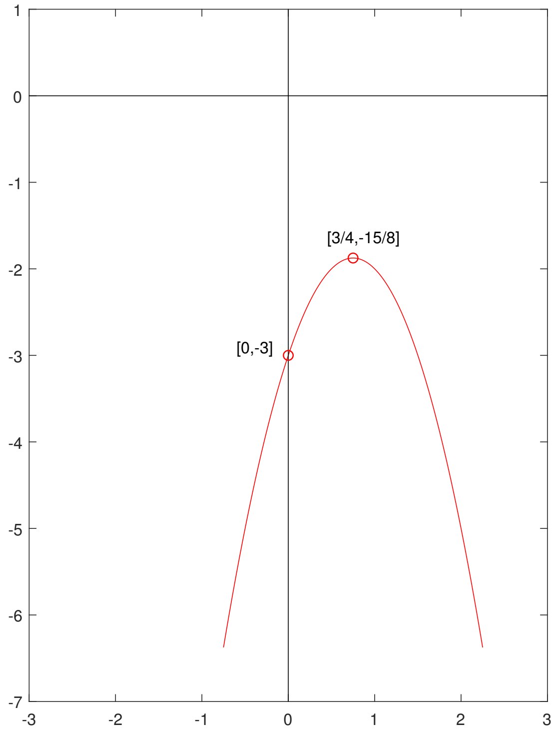
tedy parabola průsečíky s osou x nemá. Celý graf tedy leží „pod osou x“ (1 bod).

Průsečík s osou y získáme snadno dosazením nuly no předpisu funkce

$$f(0) = -3 \text{ (1 bod)}.$$

Posledním zajímavým bodem bude vrchol paraboly. Ten leží vždy uprosřed mezi oběma kořeny (jeho x-ová souřadnice je jejich aritmetickým průměrem). Tedy $x_V = \frac{3}{4}$. Pak $y_V = f(x_V) = -2 \cdot \frac{9}{16} + 3 \cdot \frac{3}{4} - 3 = -\frac{15}{8}$ (1 bod).

Náčrtek grafu viz obrázek 2.



Obrázek 2: Náčrtek grafu funkce $f(x)$ z příkladu 5 (1 bod).

Příklad 6 (Goniometrické funkce) (5 bodů celkem)

Zkusme všechny goniometrické funkce v rovnici

$$3 \cdot (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 - \sin(2 \cdot x) = 0$$

převést na stejný argument, tedy zbavit se dvojnásobného úhlu. Zřejmě dostaneme

$$3 \cdot (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 - 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = 0 \text{ (1 bod)}.$$

Nyní se pokusíme goniometrické funkce sjendotit, abychom pracovali jen s jednou. Zkusme celou rovnici vydělit např. $(\cos(x))^2$, dostaneme

$$\begin{aligned} 3 - \frac{(\cos(x))^2}{(\sin(x))^2} - \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{(\cos(x))^2} &= 0, \\ 3 - \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= 0, \\ 3 - (\tan(x))^2 - 2 \cdot \tan(x) &= 0 \text{ (1 bod)}. \end{aligned}$$

Dostali jsme obyčejnou kvadratickou rovnici, pro přehlednost můžeme provést substituci $t = \tan(x)$,

$$-t^2 - 2 \cdot t + 3 = 0, \qquad \text{neboli} \qquad t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = -1 \mp 2 \text{ (1 bod)}.$$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

Pro $t_1 = -3$ dostáváme

$$\tan(x) = -3, \qquad \text{neboli} \qquad x = \arctan(-3) + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pro $t_2 = 1$ dostáváme

$$\tan(x) = 1, \qquad \text{neboli} \qquad x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy celkem

$$x \in \left\{\arctan(-3) + k \cdot \pi,\ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}\ ^{(2\text{ body})}.$$

Příklad 7 (Kombinatorika & pravděpodobnost) (5 bodů celkem)

Vybíráme náhodně tři úsečky z pěti. Nejprve si tedy ujasníme, kolika způsoby můžeme výběr provést. První můžeme zřejmě vybrat pěti způsoby, druhou pak čtyřmi a třetí už jen třemi. Na pořadí přitom zřejmě nezáleží. Konstruujeme tedy tříprvkové kombinace z pěti,

$$C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10\ ^{(2\text{ body})}.$$

Alternativně můžeme počet kombinací získat výčtem všech možností.

Zbývá ověřit, ze kterých lze zkonstruovat trojúhelník. Snadno nahlédneme, že např. trojice $\{2,3,?\}$ nesplňují trojúhelníkovou nerovnost. Ta bude klíčem k odpovědi. Vzhledem k tomu, že kombinací není mnoho, rychle zjistíme, že trojúhelníkovou nerovnost splňují pouze dvě

$$\{3,5,7\} \quad \text{a} \quad \{5,7,11\}\ ^{(2\text{ body})}.$$

Protože každou trojici můžeme vybrat se stejnou pravděpodobností, pravděpodobnost, že tvoří trojúhelník je počet příznivých případů ku celkovému počtu případů, tedy

$$P(\text{trojice tvoří trojúhelník}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.5 = 20\,\%\ ^{(1\text{ bod})}.$$

Příklad 8 (Komplexní čísla) (5 bodů celkem)

Pro začátek je dobré si připomenout, že $\mathbf{i}^2 = -1$ tedy $\mathbf{i}^4 = 1$. To nám v první řadě pomůže upravit čitatel výrazu

$$\frac{\mathbf{i}^{10} - \mathbf{i}}{2 \cdot \mathbf{i} + 1} = \frac{\mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i}^4 \cdot \mathbf{i}^2 - \mathbf{i}}{2 \cdot \mathbf{i} + 1} = \frac{-1 - \mathbf{i}}{1 + 2 \cdot \mathbf{i}}\ ^{(2\text{ body})}.$$

Nyní se potřebujeme zbavit komplexního výrazu ve jmenovateli, tedy potřebujeme zlomek vhodně rozšířit

$$\frac{-1 - \mathbf{i}}{1 + 2 \cdot \mathbf{i}} = \frac{-1 - \mathbf{i}}{1 + 2 \cdot \mathbf{i}} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \mathbf{i}}{1 - 2 \cdot \mathbf{i}} = \frac{(-1 - \mathbf{i}) \cdot (1 - 2 \cdot \mathbf{i})}{1 + 4} = \frac{-3 + \mathbf{i}}{5}\ ^{(2\text{ body})}.$$

Označíme-li hodnotu výrazu pro jednoduchost z, pak jeho reálná a imaginární část, resp. absolutní hodnota jsou

$$\Re(z) = -\frac{3}{5}, \qquad \Im(z) = \frac{1}{5}, \qquad |z| = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2} = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ (1 bod)}.$$

Příklad 9 (Analytická geometrie) (5 bodů celkem)

Body A, B a C leží na hledané kružnici, tedy úsečky AB, AC a BC jsou tětivy této kružnice. Stačí vybrat dvě z nich, nalézt jejich osy kolmé na tyto tětivy a v jejich průsečíku leží střed kružnice.

Začněme např. osou úsečky AB, zřejmě $B - A = (2, 4)$ je normálový vektor osy, tj. o_{AB} : $2 \cdot x + 4 \cdot y + \gamma = 0$. Osa navíc musí procházet středem tětivy, tedy bodem $\frac{1}{2}(A + B) = [7, 3]$, můžeme tedy dopočítat koeficient $\gamma = -2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = -26$. Tedy, po zjednodušení (vydělení rovnice dvěma)

$$o_{AB}: \; x + 2 \cdot y - 13 = 0 \text{ (1 bod)}.$$

Nyní zopakujeme celý postup pro druhou tětivu, např AC. Normálový vektor osy je $C - A = (-4, -2)$, osa přitom prochází bodem $\frac{1}{2}(A + C) = [4, 0]$, tedy po zjednodušení (vydělení rovnice -2)

$$o_{AC}: \; 2 \cdot x + y - 8 = 0 \text{ (1 bod)}.$$

K nalezení středu kružnice zbývá vyřešit soustavu dvou nalezených rovnic os. Vyjádříme-li např. z první rovnice $x = 13 - 2 \cdot y$ a dosadíme do druhé, dostaneme

$$26 - 4 \cdot y + y - 8 = 0, \qquad \text{neboli} \qquad y = \frac{-26 + 8}{-4 + 1} = 6.$$

Dopočítáme $x = 13 - 2 \cdot 6 = 1$, čímž dostáváme souřadnice středu

$$S[1, 6] \text{ (1 bod)}.$$

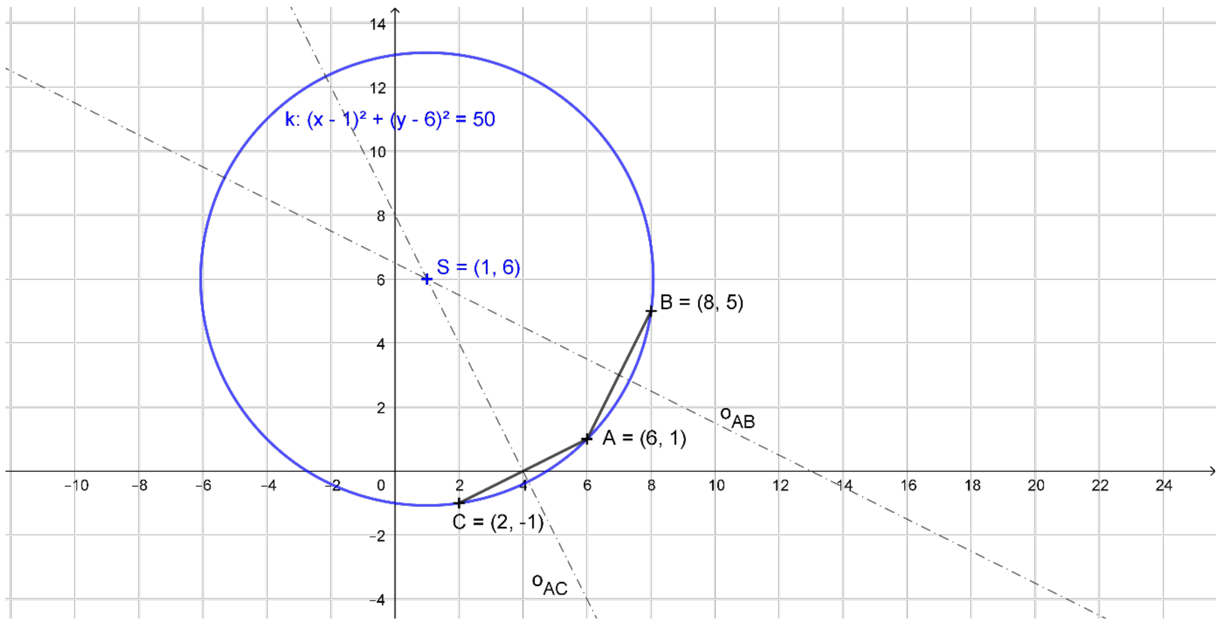
Poloměr kružnice určíme snadno jako vzdálenost středu S a jednoho z bodů na kružnici, např. A, tedy

$$\varrho = |SA| = \sqrt{(x_A - x_S)^2 + (y_A - y_S)^2} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (6 - 1)^2} = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ (1 bod)}.$$

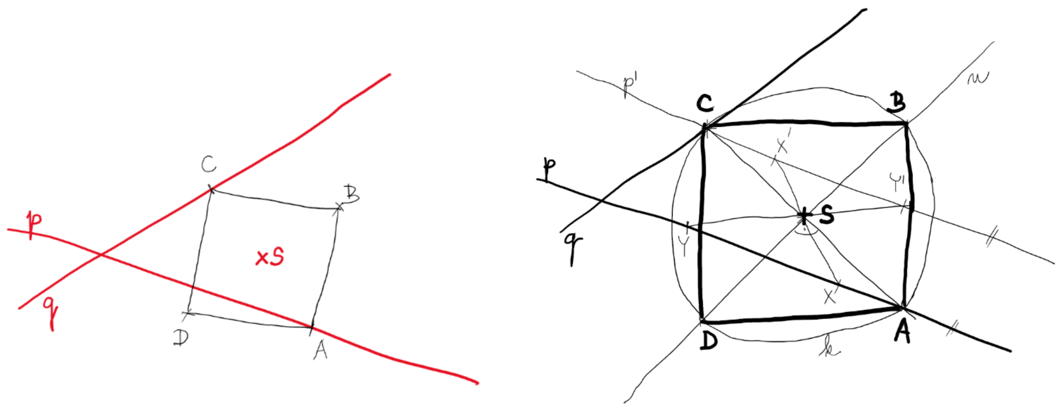
Dostáváme tak rovnici kružnice ve tvaru

$$k: \; (x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 50 \text{ (1 bod)}.$$

Náčrtek kružice viz obrázek 3.



Obrázek 3: Náčrtek kružnice k z příkladu 9 (1 bod).



Obrázek 4: Vlevo náčrtek řešení příkladu 10 (1 bod). Vpravo grafický rozbor příkladu 10 (1 bod).

Příklad 10 (Konstrukční úloha) (5 bodů celkem)

Aby S byl středem hledaného čtverce $ABCD$, kde $A \in p$ a $C \in q$ (viz náčrtek na obrázku 4 vlevo), je dobré si uvědomit následující:

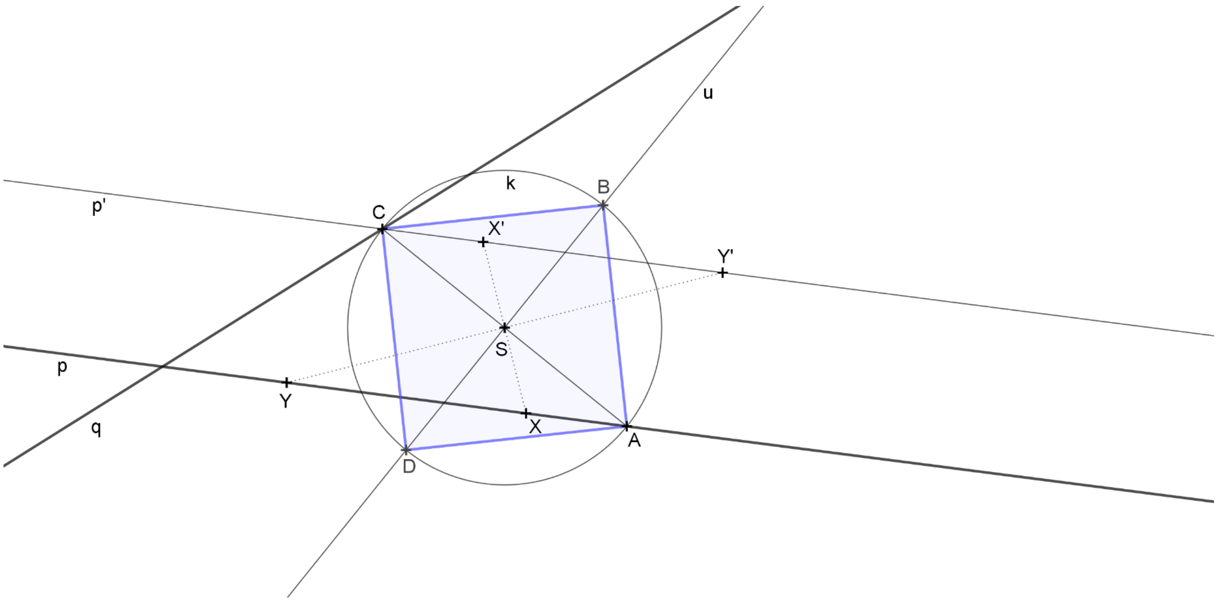
Z vlastností středové souměrnosti víme, že přímka, která neprochází středem souměrnosti S, se v dané středové souměrnosti zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou. Z toho plyne, že obrazem bodu A ležícího na přímce p ve středové souměrnosti se středem S je bod A' ležící na přímce p', která je rovnoběžná s přímkou p. Poněvadž čtverec $ABCD$ je středově souměrný útvar podle svého středu S, platí, že obraz A' vrcholu A splývá s vrcholem C hledaného čtverce, tj.

$A' \equiv C$. Podle zadání úlohy má ale také vrchol C ležet na dané přímce q. Odtud plyne, že hledaný vrchol C je průsečíkem přímek p' a q, viz grafický rozbor na obrázku 4 vpravo.

K sestrojení zbývajících dvou vrcholů B, D čtverce $ABCD$ využijeme vlastností čtverce. Úhlopříčky čtverce jsou na sebe navzájem kolmé, proto středem S sestrojíme přímku u kolmou k úsečce AC. Na přímce u budou tedy ležet zbývající vrcholy B, D čtverce. Dále víme, že úhlopříčky čtverce jsou shodné a že se navzájem půlí. Zkonstruujeme proto kružnici k se středem S a s poloměrem o velikosti rovné délce úsečky SA. Kružnice k je kružnicí čtverci $ABCD$ opsanou. Chybějící vrcholy B, D jsou průsečíky přímky u a kružnice k. Na závěr sestrojíme čtverec $ABCD$. Symbolicky:

1. p'; SS $(S; p \to p')$
2. C; $C \equiv p' \cap q$
3. A; SS $(S; C \to A)$
4. k; $k(S; |SA|)$
5. u; $S \in u$ a zároveň $u \perp AC$
6. B, D; $B, D \equiv k \cap u$
7. čtverec $ABCD$ (2 body).

Konstrukce je na obrázku 5.



Obrázek 5: Konkstrukce z příkladu 10 (1 bod).