

Přijímací zkouška
Aplikovaná fyzika, Mgr
2019

Datum:

Přidělené číslo:

Počet získaných bodů:

Pište na orazítkované papíry, na každém uveďte své přidělené číslo. (Nepodepisujte se jménem.)

Maximální počet bodů celkem je 100, jejich rozdělení pro jednotlivé úlohy najdete v zadání. Celková doba na vypracování testu je 60 minut. Finální výsledky zřetelně vyznačte rámečkem, u kterého bude napsáno číslo a písmeno příslušné části úlohy - kupříkladu 2 a), ...

Ve výsledcích se nesmí objevit veličiny neobsažené v zadání.

Úloha [1] (20 bodů)

Poločas rozpadu prvku X je $T_x = 5$ let, poločas rozpadu prvku Y je $T_Y = 30$ let. Označme $p(t)$ poměr počtů částic typu X a Y (p je funkce času). Necht' $p(0) = 1$.

- a) Najděte tvar této funkce pro obecný čas t
- b) Najděte čas τ , ve kterém platí $p(\tau) = 0,25$.

Úloha [2] (35 bodů)

Elektrostatický potenciál je daný vztahem $\varphi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + B$.

- a) Určete fyzikální rozměr konstant A a B
- b) Najděte vyjádření intenzity příslušného elektrického pole $\vec{E}(x, y, z)$
- c) Jakým geometrickým útvarům odpovídají ekvipotenciální plochy?
- d) Určete napětí mezi body M a N ležících na stejné siločáře, jejichž vzdálenosti od počátku jsou r_M a r_N .
- e) Jestliže v předchozí otázce vynecháme podmínku „na stejné siločáře“, jak se změní odpověď?
- f) Jakou práci je potřeba vykonat na přenos náboje Q mezi těmito body podél siločáry pole \vec{E} ?
- g) Jestliže v předchozí otázce vynecháme podmínku „podél siločáry“, jak se změní odpověď?

Úloha [3] (20 bodů)

Uvažujte těleso hmotnosti m uchycené na pružince konající harmonické netlumené kmity s vlastní frekvencí ω a amplitudou A . V čase $0s$ bylo v počátku souřadné soustavy.

- a) Najděte časovou závislost kinetické, potenciální a celkové energie.
- b) Jaká je maximální hodnota kinetické energie? Kdy během první periody má kinetické energie tuto hodnotu?
- c) Jaká je maximální hodnota potenciální energie? Kdy během první periody má potenciální energie tuto hodnotu?
- d) Ve kterých časech během první periody se hodnoty kinetické a potenciální energie rovnají?

Úloha [4] (25 bodů)

Uvažujte dva disky, oba se stejnou hmotností M a poloměrem R . První má konstantní plošnou hustotu, označme ji ρ_1 , druhý má plošnou hustotu lineárně závislou na vzdálenosti od středu, označme ji $\rho_2 = \alpha r$. Označme dále momenty setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na rovinu disku a procházející jeho středem J_1 a J_2 .

- a) Najděte vyjádření ρ_1 a J_1 pomocí M a R .
- b) Najděte vyjádření α , ρ_2 a J_2 .

Přijímací zkouška
Aplikovaná fyzika, Mgr,
2019 Řešení

Datum:

Přidělené číslo:

Počet získaných bodů:

Pište na orazítkované papíry, na každém uveďte své přidělené číslo. (Nepodepisujte se jménem.)

Maximální počet bodů celkem je 100, jejich rozdělení pro jednotlivé úlohy najdete v zadání. Celková doba na vypracování testu je 60 minut. Finální výsledky zřetelně vyznačte rámečkem, u kterého bude napsáno číslo a písmeno příslušné části úlohy - kupříkladu 2 a), ...

Ve výsledcích se nesmí objevit veličiny neobsažené v zadání.

Úloha [1] (20 bodů)

Poločas rozpadu prvku X je $T_X=5$ let, poločas rozpadu prvku Y je $T_Y=30$ let. Označme $p(t)$ poměr počtů částic typu X a Y (p je funkce času). Nechť $p(0)=1$.

- a) Najděte tvar této funkce pro obecný čas t

$$N_X(t) = N_X(0) \exp\left\{-\frac{\ln(2)}{T_X} t\right\} \quad N_Y(t) = N_Y(0) \exp\left\{-\frac{\ln(2)}{T_Y} t\right\}$$

$$p(t) = \frac{N_X(t)}{N_Y(t)} = \frac{N_X(0)}{N_Y(0)} \exp\left\{\left(\frac{\ln(2)}{T_Y} - \frac{\ln(2)}{T_X}\right) t\right\} = \exp\left\{\left(\frac{\ln(2)}{T_Y} - \frac{\ln(2)}{T_X}\right) t\right\}$$

- b) Najděte čas τ , ve kterém platí $p(\tau)=0,25$.

$$\begin{aligned} p(\tau) &= \frac{1}{4} = \exp\left\{\left(\frac{\ln(2)}{T_Y} - \frac{\ln(2)}{T_X}\right) \tau\right\} \\ \ln(4) &= \left(\frac{\ln(2)}{T_X} - \frac{\ln(2)}{T_Y}\right) \tau \\ \frac{\ln(4)}{\left(\frac{\ln(2)}{T_X} - \frac{\ln(2)}{T_Y}\right)} &= \tau \\ \frac{\ln(4)}{\left(\frac{\ln(2)}{T_X} - \frac{\ln(2)}{T_Y}\right)} &= \frac{\ln(4)}{\left(\frac{\ln(2)}{5\text{let}} - \frac{\ln(2)}{30\text{let}}\right)} = 6\text{let} \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = 12\text{let} = \tau \end{aligned}$$

Úloha [2] (35 bodů)

Elektrostatický potenciál je daný vztahem $\varphi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + B$.

- a) Určete fyzikální rozměr konstant A a B

$$[A] = Vm \quad [B] = V$$

- b) Najděte vyjádření intenzity příslušného elektrického pole $\vec{E}(x, y, z)$

$$\vec{E}(x, y, z) = -\text{grad}(\varphi) = \frac{A}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z) = A \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- c) Jakým geometrickým útvarům odpovídají ekvipotenciální plochy?

Na takových plochách platí $\varphi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + B = \text{konst}$, což je rovnice pro povrch sféry se středem v počátku souřadné soustavy.

- d) Určete napětí mezi body M a N ležících na stejné siločáře, jejichž vzdálenosti od počátku jsou r_M a r_N .

$$\varphi(M) - \varphi(N) = \left(\frac{A}{r_M} + B \right) - \left(\frac{A}{r_N} + B \right) = \frac{A}{r_M} - \frac{A}{r_N}$$

- e) Jestliže v předchozí otázce vynecháme podmínku „na stejné siločáře“, jak se změní odpověď?
Nijak.

- f) Jakou práci je potřeba vykonat na přenos náboje Q mezi těmito body podél siločáry pole \vec{E} ?

$$Q \times (\varphi(M) - \varphi(N)) = Q \times \left(\frac{A}{r_M} - \frac{A}{r_N} \right)$$

- g) Jestliže v předchozí otázce vynecháme podmínku „podél siločáry“, jak se změní odpověď?
Nijak, jde o konzervativní pole.

Úloha [3] (20 bodů)

Uvažujte těleso hmotnosti m uchycené na pružině konající harmonické netlumené kmity s vlastní frekvencí ω a amplitudou A . V čase $0s$ bylo v počátku souřadné soustavy.

- a) Najděte časovou závislost kinetické, potenciální a celkové energie.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t) & \dot{x}(t) &= A \omega \cos(\omega t) \\ E_k(t) &= \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \\ E_p(t) &= \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ E &= E_k(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \end{aligned}$$

- b) Jaká je maximální hodnota kinetické energie? Kdy během první periody má kinetická energie tuto hodnotu?

$$E_{k \max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

V časech $0, \pi/\omega, 2\pi/\omega$.

- c) Jaká je maximální hodnota potenciální energie? Kdy během první periody má potenciální energie tuto hodnotu?

$$E_{p \max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

V časech $\pi/2\omega, 3\pi/2\omega$.

d) Ve kterých časech během první periody se hodnoty kinetické a potenciální energie rovnají?

$$\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t)$$

$$t = \frac{\pi}{4\omega}, \quad \frac{3\pi}{4\omega}, \quad \frac{5\pi}{4\omega}, \quad \frac{7\pi}{4\omega}$$

Úloha [4] (25 bodů)

Uvažujte dva disky, oba se stejnou hmotností M a poloměrem R . První má konstantní plošnou hustotu, označme ji ρ_1 , druhý má plošnou hustotu lineárně závislou na vzdálenosti od středu, označme ji $\rho_2 = \alpha r$. Označme dále momenty setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na rovinu disku procházející jeho středem J_1 a J_2 .

a) Najděte vyjádření ρ_1 a J_1 pomocí M a R .

$$M = \int_0^R \rho_1 2\pi r dr = \rho_1 2\pi \int_0^R r dr = \rho_1 \pi R^2 \rightarrow \rho_1 = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$J_1 = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho_1 2\pi r dr = \rho_1 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

b) Najděte vyjádření α , ρ_2 a J_2 .

$$M = \int_0^R \rho_2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R \alpha r^2 dr = 2\pi \alpha \frac{R^3}{3} \rightarrow \alpha = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$$\rho_2 = \alpha r = \frac{3M}{2\pi R^3} r$$

$$J_2 = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho_2 2\pi r dr = \frac{3M}{2\pi R^3} 2\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{3M}{R^3} \frac{R^5}{5} = \frac{3MR^2}{5}$$