



## Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2017/18 NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: \_\_\_\_\_ Registrační číslo uchazeče: \_\_\_\_\_

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

### Zadání

1 Je dána funkce

$$f : x \mapsto y = \sqrt{4x + 1}.$$

Určete definiční obor, obor hodnot a derivaci funkce. Určete rovnici tečny funkce v bodě  $T = [2, ?]$ . Načrtněte graf funkce a vypočtené tečny.

2 Vypočtěte integrál

$$\int f(x) dx, \quad \text{kde } f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4}.$$

Určete základní vlastnosti (definiční obor  $D(f)$ , paritu, průsečíky s osami, limity v krajních bodech  $D(f)$ ) a načrtněte její graf.

3 Nalezněte množinu  $\mathcal{S}_\alpha$  všech (reálných) řešení  $(x, y, z)$  soustavy

$$\begin{aligned} x - \alpha y &= 1, \\ y - z &= 0, \\ x + \alpha^2 z &= \alpha^2 + 1, \end{aligned}$$

v závislosti na parametru  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Jaký objekt představuje množina  $\mathcal{S}_\alpha$  geometricky?

4 Uvažujte množinu zbytkových tříd  $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, \dots, 9\}$  spolu s operacemi sčítání a násobení (modulo deset). Množina invertibilních (tj. inverzi majících) prvků  $\mathbb{Z}_{10}^*$  tvoří spolu s násobením abelovskou grupu.

Rozhodněte zda je tato grupa izomorfní s  $\mathcal{C}_4$ , nebo  $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$ , přičemž  $\mathcal{C}_k$  značí cyklickou grupu řádu  $k$ . Izomorfismus napište.

5 Přímka  $p$  je dána rovnicí  $2x + 3y - 9 = 0$ . Určete obecnou rovnici i parametrické rovnice přímky, která je kolmá k přímce  $p$  a prochází průsečíkem  $P$  dané přímky  $p$  s osou  $x$ . Načrtněte graf.





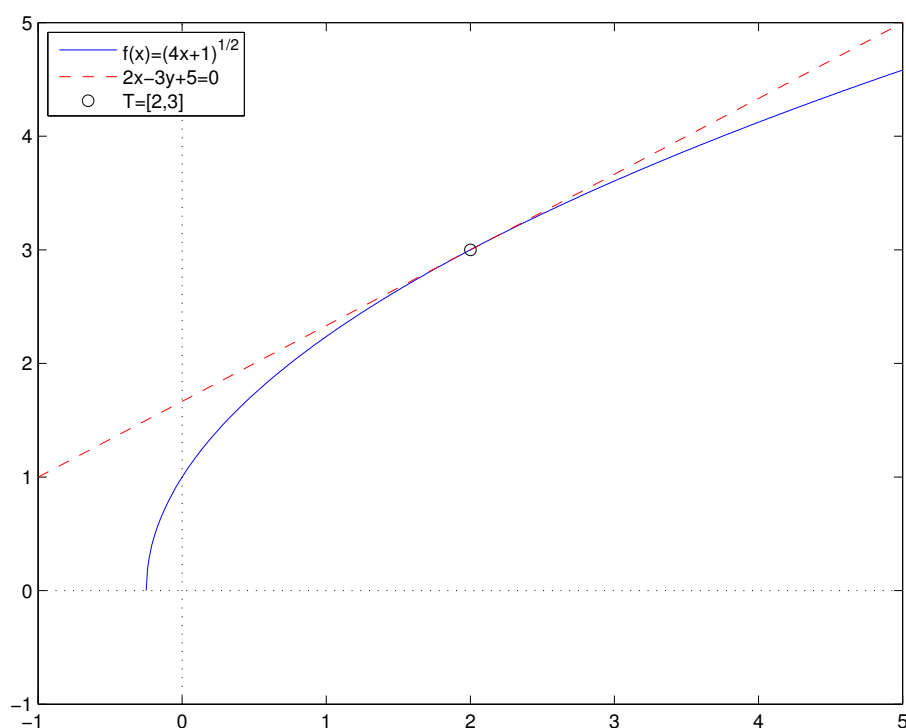
## Řešení

### Příklad 1 (20 bodů celkem)

Musí platit  $4x + 1 \geq 0$ , tedy  $D(f) = (-\frac{1}{4}, \infty)$  (3 body),  $H(f) = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty)$  (3 body). Derivace je

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} = \frac{2}{\sqrt{4x+1}} \quad (3 \text{ body}).$$

Bod dotyku  $T = [x, f(x)] = [2, 3]$ , směrnice tečny je hodnota derivace pro  $x = 2$ , tj.  $f'(2) = \frac{2}{3}$ . Tečnu hledáme ve směrnicovém tvaru  $y = kx + q = f'(x)x + q = \frac{2}{3}x + q$ . Dosazením bodu dotyku  $3 = f(x) = f'(x)x + q = \frac{2}{3} \cdot 2 + q$  získáme  $q = \frac{5}{3}$ . Rovnice tečny je tedy  $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ , po úpravě  $2x - 3y + 5 = 0$  (4 body). Grafem funkce je část paraboly, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Graf funkce  $f$  (4 body) a její tečny (3 body) v bodě  $T = [2, 3]$  z příkladu 1.





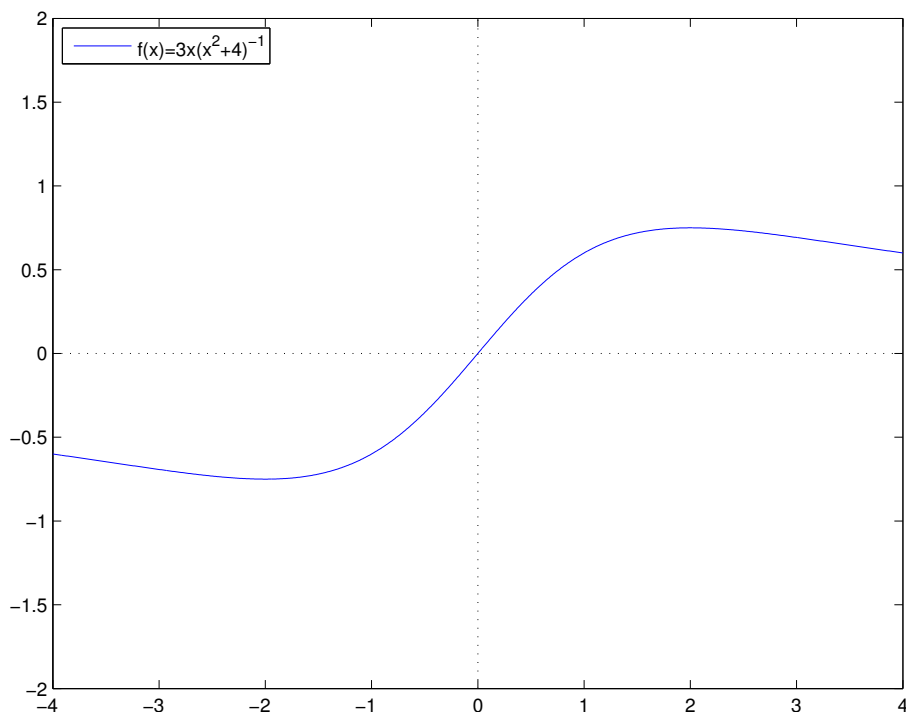
## Příklad 2 (20 bodů celkem)

Integrujeme pomocí substituce

$$\int \frac{3x}{x^2 + 4} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce :} \\ t = x^2 + 4 \quad (6 \text{ bodů}) \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ \frac{3}{2} dt = 3x dx \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int 1 dt = \frac{3}{2} \ln(|t|) + \text{Const.}$$

$$= \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4) + \text{Const.} \quad (6 \text{ bodů})$$

Pro integrand  $f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$  zřejmě platí:  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -f(-x)$  (lichá funkce, tj. její graf je symetrický podle počátku), speciálně  $f(0) = 0$ ; dále  $f(x) > 0$  pro  $x > 0$  (a  $f(x) < 0$  pro  $x < 0$ ), navíc  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$  (4 body). Graf funkce viz obrázek 2.



Obrázek 2: Graf funkce  $f$  (4 body) z příkladu 2.

## Příklad 3 (20 bodů celkem)

Gaussovou eliminací získáme horní trojúhelníkový tvar (5 bodů)

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 & \alpha^2 + 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-(1. \text{ ř.})} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\alpha \cdot (2. \text{ ř.})} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + \alpha & \alpha^2 \end{array} \right].$$





Začneme poslední rovnicí  $(\alpha^2 + \alpha)z = \alpha^2$  a provedeme diskuzi; zřejmě  $\alpha^2 + \alpha = (\alpha + 1)(\alpha + 0)$ :

- Pro  $\alpha = -1$  dostaneme  $0z = 1$  a soustava tak nemá řešení. Množina řešení je prázdná,

$$\mathcal{S}_{-1} = \emptyset \text{ (5 bodů)}.$$

• Pro  $\alpha = 0$  dostaneme  $0z = 0$ , soustava se redukuje na dvě rovnice o třech neznámých. Proměnnou  $z$ , jíž odpovídající rovnice vypadla, si zvolíme, tj.  $z = \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Z druhé rovnice dopočítáme  $y = \tau$ . Z první rovnice dopočítáme  $x = 1$ . Množinou řešení je *přímka*

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \tau \\ \tau \end{bmatrix} ; \tau \in \mathbb{R} \right\} \text{ (5 bodů)}.$$

• Pro  $\alpha \neq 0$  &  $\alpha \neq -1$  dostaneme  $z = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ . Z druhé rovnice dopočítáme  $y = \frac{\alpha}{\alpha+1}$ . Z první rovnice dopočítáme  $x = 1 + \alpha \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha+1}$ . Množina řešení je jednobodová

$$\mathcal{S}_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}} = \left\{ \frac{1}{\alpha+1} \begin{bmatrix} \alpha^2 + \alpha + 1 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \right\} \text{ (5 bodů)}.$$

#### Příklad 4 (20 bodů celkem)

Invertibilní prvky jsou nesoudělné s modulem, tj.  $\mathbb{Z}_{10}^* = \{1, 3, 7, 9\}$  (2 body) (případně je získáme z tabulky násobení), zřejmě (6 bodů):

$\mathbb{Z}_{10}^*$	1	3	7	9	$\mathcal{C}_4$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(b, a)$	$(b, b)$
1	1	3	7	9	$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$(a, a)$	$(a, a)$	$(a, b)$	$(b, a)$	$(b, b)$
3	3	9	1	7	$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$(a, b)$	$(a, b)$	$(a, a)$	$(b, b)$	$(b, a)$
7	7	1	9	3	$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$(b, a)$	$(b, a)$	$(b, b)$	$(a, a)$	$(a, b)$
9	9	7	3	1	$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$(b, b)$	$(b, b)$	$(b, a)$	$(a, b)$	$(a, a)$

Porovnáním řádů všech prvků (řád prvku  $s$  je  $\text{ord}(s) = |\{s^k; k \in \mathbb{Z}\}|$ ) jednotlivých grup (6 bodů)

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{10}^* : & \quad \text{ord}(1) = 1, & \text{ord}(3) = 4, & \text{ord}(7) = 4, & \text{ord}(9) = 2 \\ \mathcal{C}_4 : & \quad \text{ord}(a) = 1, & \text{ord}(b) = 4, & \text{ord}(c) = 2, & \text{ord}(d) = 4 \\ \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 : & \quad \text{ord}((a, a)) = 1, & \text{ord}((a, b)) = 2, & \text{ord}((b, a)) = 2, & \text{ord}((b, b)) = 2 \end{aligned}$$

vidíme, že  $\mathbb{Z}_{10}^* \not\cong (\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2)$  (izomorfismus na sebe zobrazuje prvky stejných řádů a  $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$  neobsahuje prvky řádu 4 (generátory), které v  $\mathbb{Z}_{10}^*$  jsou), musí tedy být izomorfní s  $\mathcal{C}_4$  (2 body).

Zbývá najít některý ze dvou možných izomorfismů  $\varphi : \mathbb{Z}_{10}^* \rightarrow \mathcal{C}_4$ . Zřejmě (4 body)

$$\varphi(1) = a \quad \text{a} \quad \varphi(9) = c, \quad \text{zvolíme-li například} \quad \varphi(3) = b, \quad \text{pak} \quad \varphi(7) = d.$$





### Příklad 5 (20 bodů celkem)

- Normálový vektor  $\vec{n} = (2, 3)$  přímky  $p$  je směrovým vektorem kolmice (2 body).
- Směrový vektor  $\vec{s} = (3, -2)$  přímky  $p$  je normálovým vektorem kolmice (2 body).
- Průsečík  $P$  přímky  $p$  s osou  $x$ :

$$y = 0 \implies 2x - 9 = 0 \implies x = \frac{9}{2} \implies P = \left[ \frac{9}{2}, 0 \right] \text{ (1 bod)}.$$

- Náčtr viz obrázek 3.

Obecná rovnice kolmice:

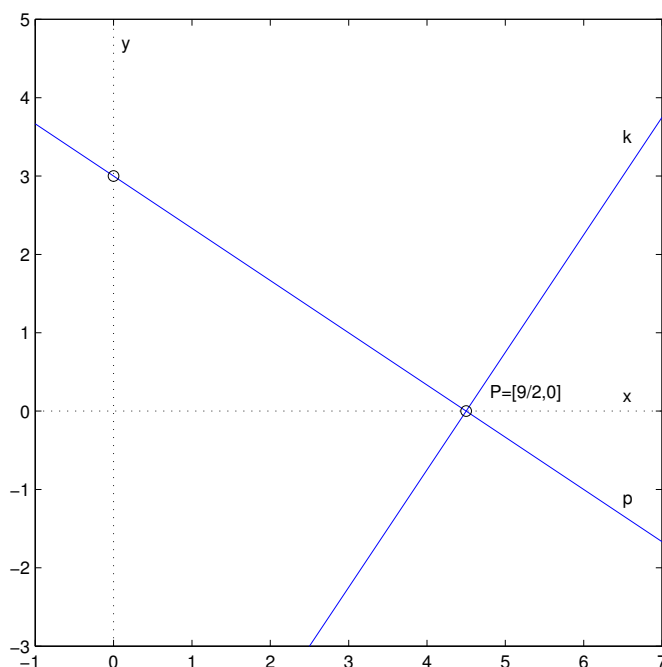
- Vyjdeme například z obecného tvaru přímky  $ax + by + c = 0$ , ze znalosti normálového vektoru kolmice dostaneme  $3x - 2y + c = 0$ . Dosadíme souřadnice bodu  $P$  a vyjádříme

$$c = -ax - by = -3x + 2y = -3 \cdot \frac{9}{2} + 2 \cdot 0 = -\frac{27}{2} \text{ (3 body)}.$$

Dostáváme tedy  $3x - 2y - \frac{27}{2} = 0$ , po úpravě  $6x - 4y - 27 = 0$  (2 body).

Parametrická rovnice kolmice:

- Parametrický popis kolmice  $k$  získáme například ze směrového vektoru kolmice. Je dán vztahy  $x = x_0 + 2t$ ,  $y = y_0 + 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (3 body).
- Dosazením bodu  $P$  dostáváme  $x = \frac{9}{2} + 2t$ ,  $y = 3t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (2 body).



Obrázek 3: Náčtr situace (5 bodů) z příkladu 5.

