

Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2024/25

NMgr. program Učitelství matematiky pro 2. st. ZŠ, resp. SŠ

Datum zkoušky: _____ Registrační číslo uchazeče: _ _ _ _ _

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke všem příkladům uvádějte dostatečně podrobný a přiměřeně okomentovaný postup.
- Příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný — odevzdávejte i pomocné výpočty.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Nalezněte všechny průsečíky křivek, celou situaci načrtněte

$$k_1 : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4,$$

$$k_2 : (x - 2)^2 + y^2 = 2.$$

2 Je zadána množina *divokých čísel* $\{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, která umíme sčítat a násobit. Pro obě operace přitom platí:

+	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit
\clubsuit	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit
\heartsuit	\heartsuit	\spadesuit	\clubsuit
\spadesuit	\spadesuit	\clubsuit	\heartsuit

.	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit
\clubsuit	\clubsuit	\clubsuit	\clubsuit
\heartsuit	\clubsuit	\heartsuit	\spadesuit
\spadesuit	\clubsuit	\spadesuit	\heartsuit

Vyřešte *divokou rovnici* (předpokládáme obvyklou prioritu operací)

$$\spadesuit \cdot x \cdot x + \heartsuit \cdot x + \spadesuit = \clubsuit \cdot \heartsuit$$

3 Nalezněte všechny lokální extrémy reálné funkce

$$f(x) = |x^3 - 3x| - 27, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4 Nalezněte alespoň jedno řešení $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X.$$

5 Kolika způsoby lze z cifer $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ sestavit sudé čtyřciferné číslo tak, aby každá cifra byla využita nejvýše jednou.

$$1) \quad \begin{aligned} (x+1)^2 + (y-1)^2 &= 9 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 - 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\ominus \quad \begin{aligned} 6x - 3 - 2y + 1 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$6x - 2y - 4 = 0$$

$$3x - y - 2 = 0$$

$$y = 3x - 2$$

$$y^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 12x + 4 - 2 = 0$$

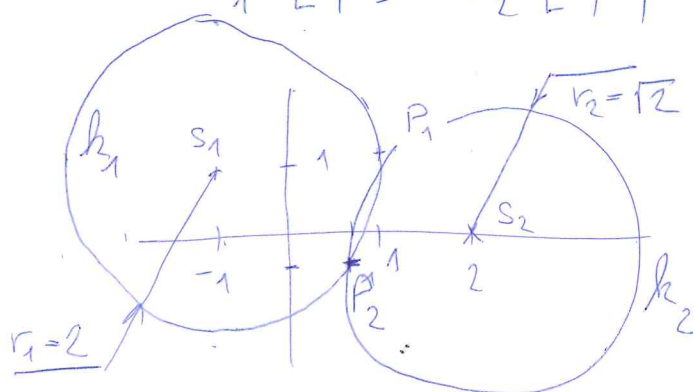
$$10x^2 - 16x + 6 = 0$$

$$5x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{10} = \frac{8 \pm 2}{10} = \begin{cases} 1 \\ 0,6 \end{cases}$$

$$y_{1,2} = \begin{cases} 3 - 2 = 1 \\ 3 \cdot 0,6 - 2 = 1,8 - 2 = -0,2 \end{cases}$$

$$P_1 = [1; 1] \quad P_2 = [0,6; -0,2]$$



$$2) \quad \spadesuit x^2 + \heartsuit x + \spadesuit = \underbrace{\clubsuit \cdot \heartsuit}_{\clubsuit}$$

$$? \quad \boxed{x = \clubsuit}, \quad x^2 = \clubsuit, \quad \spadesuit x^2 = \spadesuit \clubsuit = \clubsuit$$

$$\heartsuit x = \heartsuit \clubsuit = \clubsuit$$

$$(\clubsuit + \clubsuit) + \spadesuit = \clubsuit + \spadesuit = \spadesuit \neq \clubsuit \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \clubsuit + (\clubsuit + \spadesuit) = \clubsuit + \spadesuit = \spadesuit \end{array} \right. \quad \uparrow$$

$$? \quad \boxed{x = \heartsuit}, \quad x^2 = \heartsuit, \quad \spadesuit x^2 = \spadesuit \heartsuit = \spadesuit$$

$$\heartsuit x = \heartsuit \heartsuit = \heartsuit$$

$$(\spadesuit + \heartsuit) + \spadesuit = \clubsuit + \spadesuit = \spadesuit \neq \clubsuit \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \spadesuit + (\heartsuit + \spadesuit) = \spadesuit + \clubsuit \end{array} \right. \quad \uparrow$$

$$? \quad \boxed{x = \spadesuit}, \quad x^2 = \heartsuit, \quad \spadesuit x^2 = \spadesuit \heartsuit = \spadesuit$$

$$\heartsuit x = \heartsuit \spadesuit = \spadesuit$$

$$(\spadesuit + \spadesuit) + \spadesuit = \heartsuit + \spadesuit = \clubsuit = \clubsuit \quad \checkmark$$

$$\boxed{x = \clubsuit}$$

3)

$$f(x) = |x^3 - 3x| - 27$$

$$x^3 - 3x = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$x + \sqrt{3}$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	-	+
$x^3 - 3x$	-	+	-	+

EXTRÊMO
 $[-\sqrt{3}, -27]$ lok. min.

 $[1, -25]$ lok. max.

 $[0, -27]$ lok. min.

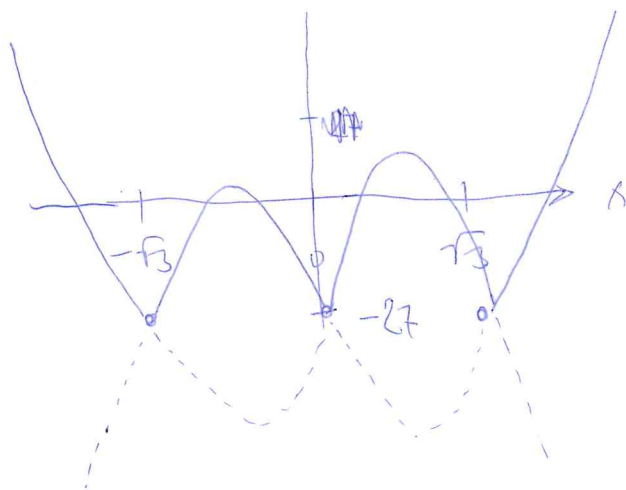
 $[1, -25]$ lok. max.

 $[\sqrt{3}, -27]$ lok. min.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x - 27 & x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \\ x^3 - 3x - 27 & x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$$

$$x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$$



$$x^3 - 3x - 27$$

$$-x^3 + 3x - 27$$

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \\ 3x^2 - 3 & x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty) \end{cases}$$

$$-3x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \in (0, \sqrt{3})$$

$$f''(1) = (-6) \cdot 1 = -6$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \in (-\sqrt{3}, 0)$$

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$$

$$4) \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 10 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 22 & -11 & 11 & 0 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 22 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 11 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 11 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$X = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -20 & -56 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

5) sudé — končí 0, 2, 4

končí 0 :
1. cifra 5 způsobů $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. cifra 4 způsobů $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1. \text{ cifra}\}$
3. cifra 3 způsobů ...
4. cifra je 0, t.j. jedním způsobem

$$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60 \text{ způsobů}$$

končí 2 :
1. cifra 4 způsobů $\{1, 3, 4, 5\}$
2. cifra 4 způsobů $\{0, 1, 3, 4, 5\} \setminus \{1. \text{ cifra}\}$
3. cifra 3 způsobů ...
4. cifra je 2 tj. jedním způsobem

$$\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48 \text{ způsobů}$$

končí 4 jako končí 2

předchozí tři situace jsou disjunktí jevy, tedy

$$\underline{\text{celkem}} \quad 60 + 48 + 48 = \underline{156 \text{ způsobů}}$$