



## Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2019/20 NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: \_\_\_\_\_ Registrační číslo uchazeče: \_\_\_\_\_

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhnete.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

### Zadání

1 Předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x^2}}$$

je dána reálná funkce reálné proměnné  $x$ . Určete maximální definiční obor funkce  $f$ , obor hodnot a derivaci funkce. Určete intervaly monotonie a lokální i globální extrémny funkce. Načrtněte graf funkce.

2 Vypočtete neurčitý integrál

$$\int \frac{dx}{1+e^x},$$

kde  $e$  je Eulerovo číslo.

3 Nalezněte množinu všech řešení  $\mathcal{S}_p = \{(x, y, z)\}$  soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x + 2y + z &= 1 \\x + y + p^2z &= p\end{aligned}$$

závislé na parametru  $p \in \mathbb{R}$ .

4 Určete poslední číslici (v desítkové soustavě) čísla

$$3^{6^{2019}}.$$

5 Rovina  $\varrho$  je dána rovnicí  $x + y + z - 1 = 0$ . Určete směrové vektory roviny. Dále určete parametrické rovnice přímky, která je k rovině  $\varrho$  kolmá a prochází bodem  $B = [3; 1; 4]$ .





## Řešení

### Příklad 1 (20 bodů celkem)

Funkce  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x^2}}$  je definována když je:

- (i) jmenovatel nenulový, tj.  $3 - x^2 \neq 0$ , tedy  $\pm\sqrt{3} \notin D(f)$ ,
- (ii) zlomek pod odmocninou nezáporný. Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$\{-\sqrt{3}\}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$\{0\}$	$(0, \sqrt{3})$	$\{\sqrt{3}\}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$\text{sgn}(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$\text{sgn}(3 - x^2)$	−	0	+	+	+	0	−
$\text{sgn}(\frac{x}{3-x^2})$	+	ndef.	−	0	+	ndef.	−

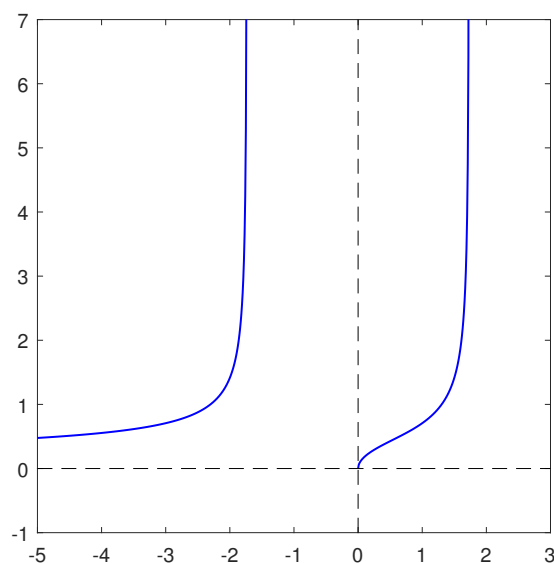
tedy

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup [0, \sqrt{3}). \quad (3 \text{ body})$$

Funkce je na  $D(f)$  spojitá,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = +\infty$ , tedy  $H(f) = [0, +\infty)$ . (3 body)  
Derivace je definovaná ve všech vnitřních bodech  $D(f)$  (tedy na  $D(f) \setminus \{0\}$ ) a platí

$$f'(x) = \left[ \left( \frac{x}{3-x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{3-x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} = \sqrt{\frac{3-x^2}{x}} \cdot \frac{3+x^2}{2(3-x^2)^2} \quad (6 \text{ bodů}) > 0,$$

funkce  $f$  je tedy na celém  $D(f)$  rostoucí (2 body). Extrémů může  $f$  nabývat pouze na hranici  $D(f)$ , tedy pouze pro  $x \in \{0\}$ , kde má lokální a zároveň globální minimum (3 body).



Obrázek 1: Graf funkce  $f$  (3 body) z příkladu 1.





### Příklad 2 (20 bodů celkem)

Integrovanou funkci např. šikovně rozšíříme

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}, \quad (4 \text{ body})$$

a provedeme vhodnou substituci

$$\left[ \begin{array}{l} t = e^x, \\ \frac{dt}{dx} = e^x, \\ dt = e^x dx \end{array} \right] \quad (4 \text{ body}) \quad \text{tj.} \quad \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{dt}{t(1+t)}.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A + (A+B)t}{t(1+t)},$$

kde  $A = 1$  a  $A + B = 0$ , tj.  $B = -1$ , (4 body) dostáváme

$$\int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t| + \text{Const.} \quad (4 \text{ body})$$

a tedy

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + \text{Const.} = x - \ln(1+e^x) + \text{Const.} \quad (4 \text{ body}).$$

### Příklad 3 (20 bodů celkem)

Soustavu nejprve upravíme Gaußovou eliminací (zde pouze vhodným odečtením; rozdíl druhé a první, a třetí a první) do tvaru

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y & = & 0 \\ (p^2 - 1)z & = & p - 1 \end{array} \quad (4 \text{ body})$$

Poslední rovnice

$$(p-1)(p+1)z = p-1$$

je výchozím bodem pro diskuzi (4 body). Zřejmě:

- Pro  $p = -1$  se poslední rovnice redukuje na  $0z = -2$  a soustava jako taková tedy nemá řešení, tj.

$$\mathcal{S}_{-1} = \emptyset \quad (4 \text{ body}).$$





- Pro  $p = 1$  se poslední rovnice redukuje na  $0z = 0$ , celá soustava pak na

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

z čehož ihned dostáváme  $y = 0$  (z druhé rovnice) a  $z = \tau$ ,  $x = 1 - \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  (z první rovnice) tj.

$$\mathcal{S}_1 = \{(1 - \tau, 0, \tau) : \tau \in \mathbb{R}\} \text{ (4 body),}$$

soustava má nekonečně mnoho řešení.

- Pro  $p \neq \pm 1$  můžeme v poslední rovnici dělit výrazem  $(p^2 - 1)$  dostáváme  $z = \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p+1}$  (z poslední rovnice),  $y = 0$  (z druhé rovnice) a  $x = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$ , tj.

$$\mathcal{S}_{p \neq \pm 1} = \left\{ \left( \frac{p}{p+1}, 0, \frac{1}{p+1} \right) \right\} \text{ (4 body).}$$

#### Příklad 4 (20 bodů celkem)

Ptáme se na poslední číslici v desítkové soustavě, hledáme tedy takové  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  aby

$$3^{6^{2019}} \equiv x \pmod{10} \text{ (4 body).}$$

(Pro jistotu připomeňme, že  $3^{6^{2019}} = 3^{(6^{2019})} \neq (3^6)^{2019} = 3^{6 \cdot 2019}$ .) Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 = 3^0 &\equiv 1 \pmod{10} \\ 3 = 3^1 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 9 = 3^2 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 27 = 3^3 &\equiv 7 \pmod{10} \\ 81 = 3^4 = 3 \cdot 3^3 &\equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10} \\ 3^5 = 3 \cdot 3^4 &\equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod{10} \\ 3^6 = 3 \cdot 3^5 &\equiv 3 \cdot 3 = 9 \pmod{10} \\ &\vdots \\ 3^\ell &\equiv k \pmod{10} \\ 3^{\ell+1} = 3 \cdot 3^\ell &\equiv 3 \cdot k \pmod{10} \end{aligned} \text{ (4 body)}$$

přičemž čísla na pravých stranách se opakují s periodou čtyři. Potřebujeme tedy zjistit kolikrát se vejde čtyřka do  $6^{2019}$ , resp. přesněji, kolik je  $y \in \{0, 1, 2, 3\}$  tak aby

$$6^{2019} \equiv y \pmod{4} \text{ (4 body)}$$





(vzhledem k tomu, že 3 a 10 jsou nesoudělné, lze k této kongruenci dospět přímo použitím Eulerovy věty a Eulerovy funkce  $\varphi$ ;  $\varphi(10) = 4$ ). Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 = 6^0 &\equiv 1 \pmod{4} \\ 6 = 6^1 &\equiv 2 \pmod{4} \\ 36 = 6^2 &\equiv 0 \pmod{4} \\ 6^3 = 6 \cdot 6^2 &\equiv 6 \cdot 0 = 0 \pmod{4} \\ &\vdots \\ 6^\ell &\equiv 0 \pmod{4} \quad \text{pro } \ell \geq 2. \end{aligned} \quad (4 \text{ body})$$

Protože  $2019 \geq 2$ , pak  $6^{2019} \equiv 0 = y \pmod{4}$  a

$$3^{6^{2019}} \equiv 3^y = 3^0 = 1 = x \pmod{10} \quad (4 \text{ body}).$$

Poslední číslicí je tedy 1.

### Příklad 5 (20 bodů celkem)

Rovina  $\varrho : x + y + z - 1 = 0$  má normálový vektor  $\vec{n}_\varrho = (1; 1; 1)$  (4 body). Směrové vektory (rovina má dva) jsou na normálový vektor kolmé, můžeme zvolit např.

$$\vec{s}_{\varrho,1} = (1; -1; 0), \quad \text{a} \quad \vec{s}_{\varrho,2} = (0; 1; -1) \quad (4 \text{ body}).$$

Přímka  $p$  je parametricky dána jako množina bodů

$$[x; y; z] = [x_0; y_0; z_0] + \vec{s}_p \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3 \text{ body}),$$

kde  $\vec{s}_p$  je směrový vektor  $p$ ,  $t$  je parametr a  $[x_0; y_0; z_0]$  je libovolný bod přímky  $p$ . Protože hledáme přímku kolmou na rovinu, pak  $\vec{s}_p = \vec{n}_\varrho$  (3 body). Přímka má procházet zadaným bodem  $B = [3; 1; 4]$  (3 body), tedy

$$\begin{aligned} p: x &= 3 + t \\ y &= 1 + t \\ z &= 4 + t \end{aligned} \quad (3 \text{ body})$$

případně  $p : [x; y; z] = [3; 1; 4] + (1; 1; 1)t$ , kde  $t \in \mathbb{R}$ .





## Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2019/20 NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: \_\_\_\_\_ Registrační číslo uchazeče: \_\_\_\_\_

Varianta 2

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

### Zadání

1 Předpisem

$$f(x) = \ln \left( \frac{x}{1-x^2} \right)$$

je dána reálná funkce reálné proměnné  $x$ . Určete maximální definiční obor funkce  $f$ , obor hodnot a derivaci funkce. Určete intervaly monotonie a lokální i globální extrémny funkce. Načrtněte graf funkce.

2 Vypočtete určitý integrál

$$\int_0^3 x \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

kde  $e$  je Eulerovo číslo.

3 Nalezněte determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4 Určete poslední číslici (v desítkové soustavě) čísla

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}}.$$

5 Jsou dány dvě roviny  $\varrho : x + y + z - 1 = 0$  a  $\pi : x + y - z + 1 = 0$ . Zjistěte, zda jsou, či nejsou rovnoběžné. Pokud jsou rovnoběžné, určete jejich vzdálenost. Pokud nejsou, nalezněte parametrickou rovnici jejich průsečnice (přímky ležící v jejich průniku).





## Řešení

### Příklad 1 (20 bodů celkem)

Funkce  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$  je definována když je:

- (i) jmenovatel nenulový, tj.  $1 - x^2 \neq 0$ , tedy  $\pm 1 \notin D(f)$ ,
- (ii) argument logaritmu kladný. Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -1)$	$\{-1\}$	$(-1, 0)$	$\{0\}$	$(0, 1)$	$\{1\}$	$(1, \infty)$
$\text{sgn}(x)$	–	–	–	0	+	+	+
$\text{sgn}(1 - x^2)$	–	0	+	+	+	0	–
$\text{sgn}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$	+	ndef.	–	0	+	ndef.	–

tedy

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 1). \quad (3 \text{ body})$$

Funkce je na  $D(f)$  spojitá,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ , tedy  $H(f) = \mathbb{R}$ .  
(3 body) Derivace je definovaná na celém  $D(f)$  a platí

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{x} \cdot \frac{1 \cdot (1 - x^2) - x \cdot (0 - 2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{x(1 - x^2)} \quad (4 \text{ body}).$$

Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -1)$	$(0, 1)$
$\text{sgn}(1 + x^2)$	+	+
$\text{sgn}(1 - x^2)$	–	+
$\text{sgn}(x)$	–	+

funkce  $f$  je tedy na obou intervalech  $D(f)$  rostoucí (4 body). Extrémů může  $f$  nabývat pouze na hranici  $D(f)$ , která ovšem není součástí  $D(f)$ . Funkce tedy extrémy nemá (3 body).

### Příklad 2 (20 bodů celkem)

Nalezneme primitivní funkci k funkci  $x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ , např. metodou per-partes

$$\left[ \begin{array}{ll} u = x, & v' = e^{-\frac{x}{2}}, \\ u' = 1, & v = -2e^{-\frac{x}{2}}, \end{array} \right] \quad (7 \text{ bodů})$$

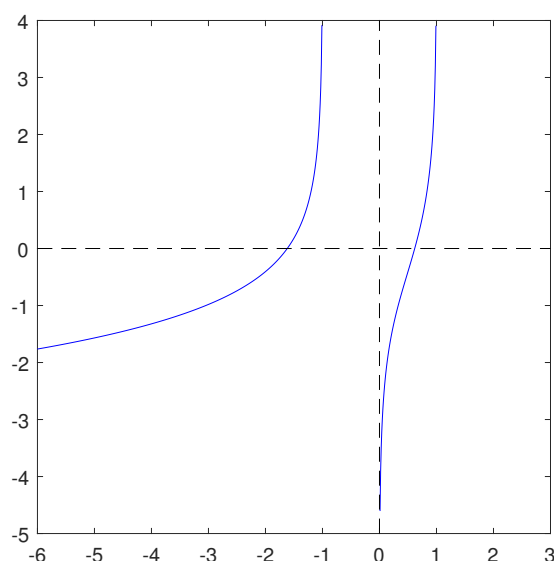
tj.

$$\int x \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx = -2xe^{-\frac{x}{2}} + 2 \int e^{-\frac{x}{2}} dx = -(2x + 4)e^{-\frac{x}{2}} + \text{Const.} \quad (7 \text{ bodů})$$

Dosazením integračních mezí dostaneme

$$\int_0^3 x \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[ -(2x + 4)e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^3 = 4 - 10e^{-\frac{3}{2}}. \quad (6 \text{ bodů})$$





Obrázek 1: Graf funkce  $f$  (3 body) z příkladu 1.

### Příklad 3 (20 bodů celkem)

Můžeme opakovaně použít Laplaceův rozvoj podle řádku nebo sloupce, nebo můžeme např. provést šikovnou simultánní permutaci řádků a sloupců, dostaneme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (8 \text{ bodů}).$$

Protože poslední determinant je blokově diagonální (2 body), dostaneme

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) \quad (5 \text{ bodů})$$

a tedy

$$\det(A) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) \cdot (9 \cdot 7 - 8 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 5 - 6 \cdot 4) = 1 \quad (5 \text{ bodů}).$$

### Příklad 4 (20 bodů celkem)

Ptáme se na poslední číslici v desítkové soustavě, hledáme tedy takové  $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  aby

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}} \equiv x \pmod{10} \quad (3 \text{ body}).$$







(Pro jistotu připomeňme, že  $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{b \cdot c}$ .) Začneme prvním sčítancem  $3^{6^{2019}}$ . Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 &= 3^0 \equiv 1 \pmod{10} \\ 3 &= 3^1 \equiv 3 \pmod{10} \\ 9 &= 3^2 \equiv 9 \pmod{10} \\ 27 &= 3^3 \equiv 7 \pmod{10} \\ 81 &= 3^4 = 3 \cdot 3^3 \equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10} \\ 3^5 &= 3 \cdot 3^4 \equiv 3 \cdot 1 = 3 \pmod{10} \\ 3^6 &= 3 \cdot 3^5 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \pmod{10} \\ &\vdots \\ 3^\ell &\equiv k \pmod{10} \\ 3^{\ell+1} &= 3 \cdot 3^\ell \equiv 3 \cdot k \pmod{10} \end{aligned} \quad (3 \text{ body})$$

přičemž čísla na pravých stranách se opakují s periodou čtyři. Potřebujeme tedy zjistit kolikrát se vejde čtyřka do  $6^{2019}$ , resp. přesněji hledáme  $y \in \{0, 1, 2, 3\}$  tak, aby

$$6^{2019} \equiv y \pmod{4} \quad (3 \text{ body})$$

(vzhledem k tomu, že 3 a 10 jsou nesoudělné, lze k této kongruenci dospět přímo použitím Eulerovy věty a Eulerovy funkce  $\varphi$ ;  $\varphi(10) = 4$ ). Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 &= 6^0 \equiv 1 \pmod{4} \\ 6 &= 6^1 \equiv 2 \pmod{4} \\ 36 &= 6^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ 6^3 &= 6 \cdot 6^2 \equiv 6 \cdot 0 = 0 \pmod{4} \\ &\vdots \\ 6^\ell &\equiv 0 \pmod{4} \quad \text{pro } \ell \geq 2 \end{aligned} \quad (3 \text{ body})$$

Protože  $2019 \geq 2$ , pak  $6^{2019} \equiv 0 = y \pmod{4}$  a

$$3^{6^{2019}} \equiv 3^y = 3^0 = 1 = x \pmod{10} \quad (3 \text{ body}).$$

Podobně vyšetříme druhý sčítanec  $5^{9^{2019}}$ . Zde je situace ještě jednodušší

$$\begin{aligned} 1 &= 5^0 \equiv 1 \pmod{10} \\ 5 &= 5^1 \equiv 5 \pmod{10} \\ 25 &= 5^2 \equiv 5 \pmod{10} \\ &\vdots \\ 5^\ell &\equiv 5 \pmod{10} \quad \text{pro } \ell \geq 1, \quad \text{tedy} \\ 5^{9^{2019}} &\equiv 5 \pmod{10} \end{aligned} \quad (3 \text{ body})$$

Poslední číslicí je tedy

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}} \equiv 1 + 5 \equiv 6 \pmod{10} \quad (2 \text{ body}).$$





### Příklad 5 (20 bodů celkem)

Rovina  $\varrho: x + y + z - 1 = 0$  má normálový vektor  $\vec{n}_\varrho = (1; 1; 1)$ , rovina  $\pi: x + y - z + 1 = 0$  má normálový vektor  $\vec{n}_\pi = (1; 1; -1)$ . Kdyby byly roviny rovnoběžné, měly by stejné normálové vektory. Roviny tedy rovnoběžné nejsou (4 body).

Průsečnice, tedy přímka ležící v průniku obou rovin je množinou bodů splňujících rovnice obou rovin zároveň. Budeme tedy hledat množinu všech bodů (řešení), vyhovujících soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + y - z + 1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{schematicky} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4 \text{ body}).$$

Řešíme např. Odečtením obou rovnic (tj. Gaußovou eliminací) dostaneme

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \quad (4 \text{ body})$$

tedy  $z = 1$ . Volba parametru, např.  $y = \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , nám umožní dopočítat poslední neznámou  $x = -y - z + 1 = -\tau$  (4 body). Dostáváme tak parametrický popis průsečnice

$$\begin{aligned} p: x &= -\tau \\ y &= \tau \\ z &= 1 \end{aligned} \quad (4 \text{ body})$$

případně  $p: [x; y; z] = [0; 0; 1] + (-1; 1; 0) \tau$ , kde  $\tau \in \mathbb{R}$ .

