



Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2016/17 NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: _____ Registrační číslo uchazeče: _____

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Je dána funkce

$$f : y = \frac{1}{2x - 1}.$$

Určete definiční obor, obor hodnot a derivaci funkce. Určete rovnici tečny funkce v bodě $T = [1, ?]$. Načrtněte graf funkce a vypočtené tečny.

2 Vypočtete integrál

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Určete základní vlastnosti (definiční obor $D(f)$, paritu, průsečíky s osami, limity v krajních bodech $D(f)$) a načrtněte její graf.

3 Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

a spočtete úhel, který svírají její vlastní vektory (uvažujte obecně $a \neq 0$, $b \neq 0$).

4 Uvažujte množinu zbytkových tříd $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, \dots, 7\}$ spolu s operacemi sčítání a násobení (modulo osm). Množina invertibilních (tj. inverzi majících) prvků \mathbb{Z}_8^* tvoří spolu s násobením abelovskou grupu.

Rozhodněte zda je tato grupa izomorfní s C_4 , nebo $C_2 \times C_2$, přičemž C_k značí cyklickou grupu řádu k . Izomorfismus napište.

5 Je dána přímka $p : 3x - 4y + 12 = 0$. Určete obvod trojúhelníku vymezeného přímkou p a osami x , y souřadnicového systému. Načrtněte graf.





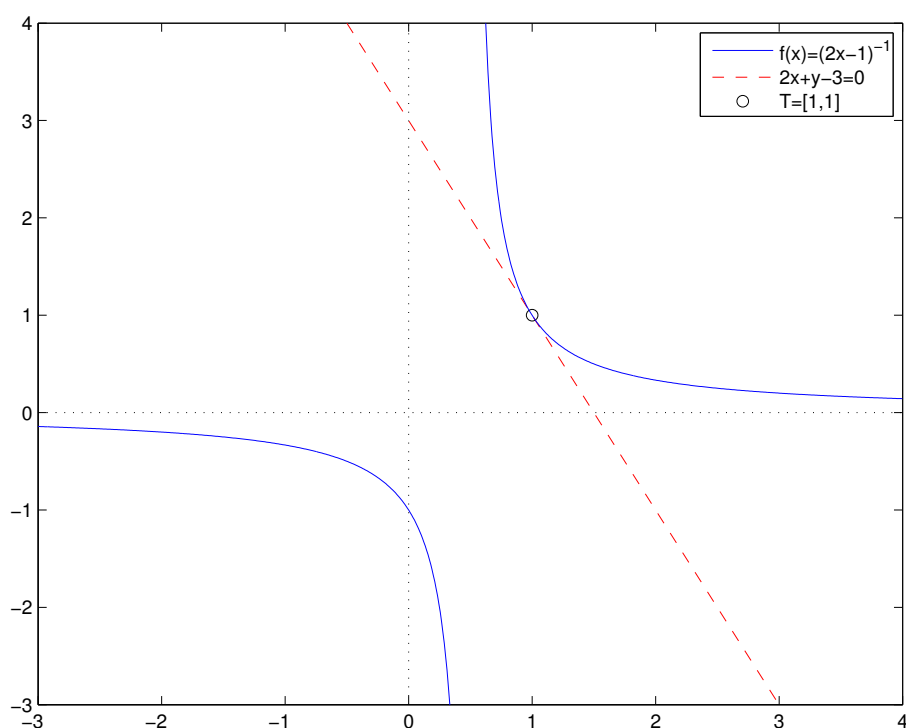
Řešení

Příklad 1 (20 bodů celkem)

Musí platit $2x - 1 \neq 0$, tedy $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ (3 body), $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (3 body). Derivace je

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2} \text{ (3 body).}$$

Bod dotyku $T = [x, f(x)] = [1, 1]$, směrnice tečny je hodnota derivace pro $x = 1$, tj. $f'(1) = -2$. Tečnu hledáme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q = f'(x)x + q = -2x + q$. Dosazením bodu dotyku $1 = f(x) = f'(x)x + q = -2 \cdot 1 + q$ získáme $q = 3$. Rovnice tečny je tedy $y = -2x + 3$, po úpravě $2x + y - 3 = 0$ (4 body). Grafem funkce je hyperbola, viz obrázek 1.



Obrázek 1: Graf funkce f (4 body) a její tečny (3 body) v bodě $T = [1, 1]$ z příkladu 1.



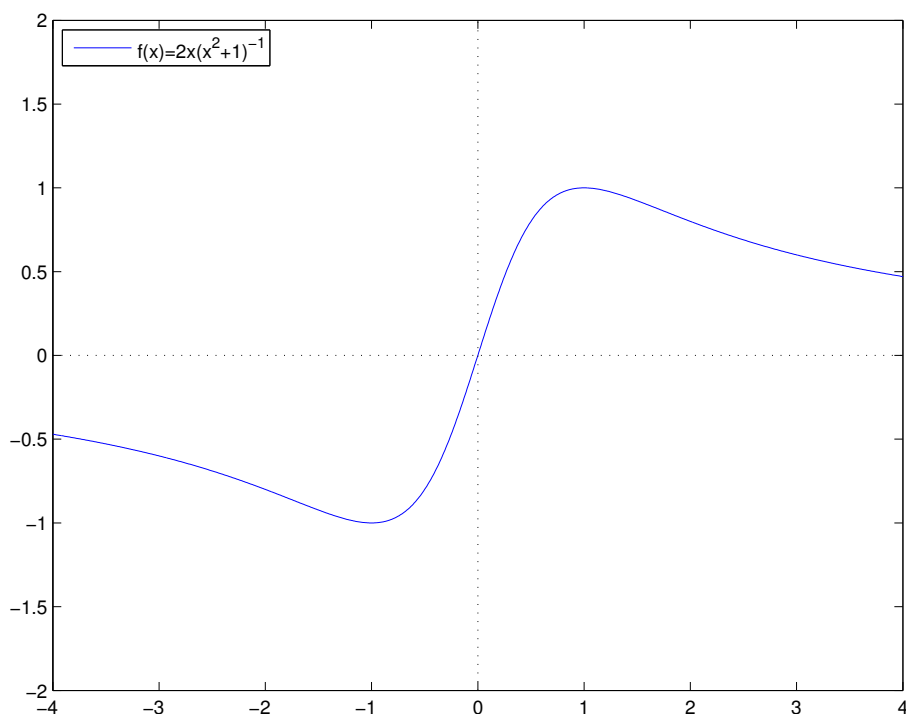


Příklad 2 (20 bodů celkem)

Integrujeme pomocí substituce

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left| \begin{array}{l} \text{Substituce :} \\ t = x^2 + 1 \text{ (6 bodů)} \\ \frac{dt}{dx} = 2x \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + \text{Const.} \\ = \ln(x^2 + 1) + \text{Const. (6 bodů)}.$$

Označme integrand $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$ (lichá funkce, tj. její graf je symetrický podle počátku), speciálně $f(0) = 0$; dále $f(x) > 0$ pro $x > 0$ (a $f(x) < 0$ pro $x < 0$), navíc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$ (4 body). Graf funkce viz obrázek 2.



Obrázek 2: Graf funkce f (4 body) z příkladu 2.

Příklad 3 (20 bodů celkem)

Pro vlastní číslo λ a vlastní vektor v platí $Mv = v\lambda$, $v \neq 0$. Speciálně tedy $\det(M - \lambda I) = 0$, kde

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2) \text{ (2 body)}.$$





Použitím vzorce pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme vlastní čísla $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ (6 bodů).

Označme x_ℓ, y_ℓ složky vlastního vektoru $v_\ell = \begin{bmatrix} x_\ell \\ y_\ell \end{bmatrix}$, $\ell = 1, 2$. Zbývá vyřešit soustavy $(M - \lambda_\ell I)v_\ell = 0$, $\ell = 1, 2$, tj.

$$\left[\begin{array}{cc|c} a - (a \pm bi) & -b & 0 \\ b & a - (a \pm bi) & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \mp i & -1 & 0 \\ 1 & \mp i & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \mp i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2 \text{ body})$$

tedy

$$\mp i x_\ell - y_\ell = 0.$$

Řešením jsou například vektory $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ (6 bodů).

Úhel φ mezi vektory v_1 a v_2 spočteme podle vztahu $\cos(\varphi) = \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\| \|v_2\|}$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin vektorů (nezapomínejme na *nekomutativitu* skalárního součinu související s komplexním sdružováním druhým z jeho argumentů) a $\|\cdot\|$ je norma vektoru, tj.

$$\cos(\varphi) = \frac{|x_1 \overline{x_2} + y_1 \overline{y_2}|}{\sqrt{|x_1|^2 + |y_1|^2} \sqrt{|x_2|^2 + |y_2|^2}} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{a tedy} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (4 \text{ body}).$$

Alternativně lze úhel určit následující úvahou: Matice je zřejmě normální $MM^T = M^T M$ (množina takových matic je spolu se sčítáním a násobením izomorfní s množinou komplexních čísel a jejich sčítání a násobením). Vlastní vektory normálních matic odpovídající různým vlastním číslům ($b \neq 0 \implies \lambda_1 \neq \lambda_2$) jsou navzájem ortogonální, hledaný úhel je tedy $\pi/2$.

Příklad 4 (20 bodů celkem)

Invertibilní prvky jsou nesoudělné s modulem, tj. $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ (2 body) (případně je získáme z tabulky násobení), zřejmě (6 bodů):

\mathbb{Z}_8^*	1	3	5	7	\mathcal{C}_4	a	b	c	d	$\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
1	1	3	5	7	a	a	b	c	d	(a, a)	(a, a)	(a, b)	(b, a)	(b, b)
3	3	1	7	5	b	b	c	d	a	(a, b)	(a, b)	(a, a)	(b, b)	(b, a)
5	5	7	1	3	c	c	d	a	b	(b, a)	(b, a)	(b, b)	(a, a)	(a, b)
7	7	5	3	1	d	d	a	b	c	(b, b)	(b, b)	(b, a)	(a, b)	(a, a)

Porovnáním řádů všech prvků (řád prvku s je $\text{ord}(s) = |\{s^k; k \in \mathbb{Z}\}|$) jednotlivých grup (6 bodů)

$$\begin{array}{llll} \mathbb{Z}_8^* : & \text{ord}(1) = 1, & \text{ord}(3) = 2, & \text{ord}(5) = 2, & \text{ord}(7) = 2 \\ \mathcal{C}_4 : & \text{ord}(a) = 1, & \text{ord}(b) = 4, & \text{ord}(c) = 2, & \text{ord}(d) = 4 \\ \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 : & \text{ord}((a, a)) = 1, & \text{ord}((a, b)) = 2, & \text{ord}((b, a)) = 2, & \text{ord}((b, b)) = 2 \end{array}$$

vidíme, že $\mathbb{Z}_8^* \not\cong \mathcal{C}_4$ (izomorfismus na sebe zobrazuje prvky stejných řádů a \mathcal{C}_4 obsahuje prvky řádu 4 (generátory), které v \mathbb{Z}_8^* nejsou), musí tedy být izomorfní s $\mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$ (2 body).

Zbývá najít některý ze šesti možných izomorfismů $\varphi : \mathbb{Z}_8^* \rightarrow \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$. Zřejmě (4 body)

$$\varphi(1) = (a, a), \quad \text{zvolíme-li například} \quad \varphi(3) = (a, b) \quad \text{a} \quad \varphi(5) = (b, a), \quad \text{pak} \quad \varphi(7) = (b, b).$$





Příklad 5 (20 bodů celkem)

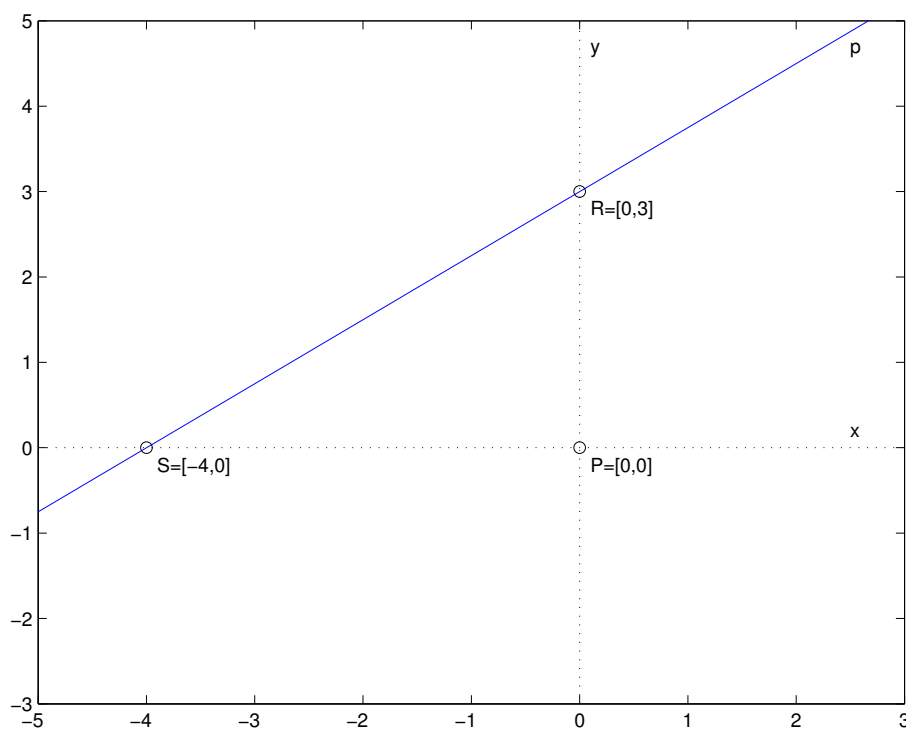
- První vrchol trojúhelníka $P = [0, 0]$ je průsečík os.
- Průsečík přímky p s osou y :

$$x = 0 \implies -4y + 12 = 0 \implies y = 3 \implies R = [0, 3] \text{ (4 body).}$$

- Průsečík přímky p s osou x :

$$y = 0 \implies 3x + 12 = 0 \implies x = -4 \implies S = [-4, 0] \text{ (4 body).}$$

- Vzdálenost $|RS| = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (0 - 3)^2} = 5$ (4 body).
- Obvod trojúhelníka RSP je $o = 5 + 4 + 3 = 12$ (4 body).
- Náčrt viz obrázek 3.



Obrázek 3: Náčrt situace (4 body) z příkladu 5.