

Přijímací test z matematiky

pro akademický rok 2019/20, navazující magisterský program Aplikovaná matematika

U všech níže uvedených příkladů uveďte celý postup řešení a výsledek řádně označte!

1. Uvažujte logickou formuli

$$\neg(p \wedge \neg q) \rightarrow ((r \vee \neg p) \wedge \neg q),$$

kde p, q, r jsou logické proměnné (pravda, nepravda), \neg označuje negaci, \wedge označuje konjunkci (logická spojka a), \vee označuje disjunkci (logická spojka nebo) a \rightarrow označuje implikaci. a) Sestavte pravdivostní tabulku dané formule. b) Upravte logickou formuli

$$\neg((p \rightarrow \neg q) \vee \neg r)$$

tak, aby výsledný tvar obsahoval negace pouze jednotlivých logických proměnných.

Řešení: a)

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$r \vee \neg p$	$(r \vee \neg p) \wedge \neg q$	$výsl$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0

; b) $\neg((p \rightarrow \neg q) \vee \neg r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$

2. Uvažujte náhodnou veličinu X s hustotou pravděpodobnosti $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$, kde $0 < \lambda$ je daná konstanta. a) Určete distribuční funkci náhodné veličiny X . b) Spočítejte pravděpodobnost, že náhodná veličina X bude větší než $2/\lambda$, tj. $Pr(2/\lambda < X)$.

Řešení: a) $F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$; b) $Pr(2/\lambda < X) = 1 - Pr(X \leq 2/\lambda) = e^{-2} \cong 0,1353$

3. V oboru reálných čísel vyřešte soustavu rovnic $2^{-4x} \cdot 4^{x^2} = 2^{8y}$, $x + 2y = 4$.

Řešení: $(x, y) \in \{(2\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}); (-2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})\}$

4. V rovině jsou dány následující body $A[3,9]$, $B[7,3]$, $C[14,12]$. a) Spočítejte obvod a plochu trojúhelníka $\triangle ABC$. b) Napište rovnici přímky procházející středem strany AB a vrcholem C .

Řešení: a) $O_{ABC} = l_{AB} + l_{BC} + l_{CA} = 2\sqrt{13} + \sqrt{130} + \sqrt{130} \cong 30,0146$;

rovnoramenný $\Delta \rightarrow S_{ABC} = \frac{l_{AB} \cdot v_{AB}}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot 3\sqrt{13}}{2} = 39$

b) $y - y_C = \frac{y_{S_{AB}} - y_C}{x_{S_{AB}} - x_C} (x - x_C) \xrightarrow{S_{AB}[5,6]} y - 12 = \frac{6-12}{5-14} (x - 14) \rightarrow 3y = 2x + 8 \rightarrow y = \frac{(2x + 8)}{3}$

5. Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Definujte pojmy: a) nerostoucí posloupnost, b) shora omezená posloupnost, c) neomezená posloupnost. V definicích uvedených pojmů použijte kvantifikátory!

Řešení: a) $\forall n \in N \ a_n \geq a_{n+1}$ b) $\exists K \in R \ \forall n \in N \ a_n \leq K$ c) $\forall K \in R \ \exists n \in N \ |a_n| > K$